



Facultat de física
Departament d'Estructura
i Constituents de la Matèria

Curso de doctorado
Física Avanzada

Partículas Elementales

Parte teórica

Jaume López Carballo

Bienio 2003-2005

Índice general

Índice general	III
Prólogo	v
1. Introducción	1
1.1. Dónde estamos	1
1.2. Unidades naturales	1
1.3. Breve inventario de partículas elementales	2
2. Teorías de gauge	5
2.1. Repaso de teoría de grupos. Grupo $SU(N)$	5
2.1.1. Grupos de Lie	5
2.1.2. Álgebras de Lie	6
2.1.3. Teoría de representaciones	7
2.2. Electrodinámica cuántica (QED)	8
2.3. Teorías gauge no abelianas	10
2.3.1. Construcción del lagrangiano	10
2.3.2. Cromodinámica cuántica (QCD)	11
2.3.3. Reglas de Feynman generalizadas	12
2.4. Helicidad y quiralidad	14
2.4.1. Helicidad	14
2.4.2. Quiralidad	16
3. Interacción nuclear fuerte. Cromodinámica cuántica	19
3.1. Libertad asintótica	19
3.2. Sector de los tres quarks ligeros	22
3.3. Realización de la simetría	24
3.4. Grupo $SU(3)$	26
3.4.1. Subgrupos: hipercarga, isospin, V-spin y U-spin	26
3.4.2. Representaciones de $SU(3)$	27
3.4.3. Producto tensorial de representaciones. Tablas de Young	29
3.5. Clasificación de los hadrones	36
3.5.1. Mesones	36
3.5.2. Bariones	37
4. Teorías efectivas	41
4.1. Octete de bariones	41
4.1.1. Rompimiento de la simetría	41
4.1.2. Construcción de los términos que rompen la simetría	42
4.1.3. Lagrangiano en términos de las partículas físicas	43
4.1.4. Masas de los bariones del octete. Relación de Gell-Mann–Okubo	45
4.2. Decuplete de bariones	46
4.3. Modelo sigma no lineal	47
4.3.1. Obtención del lagrangiano	47
4.3.2. Rompimiento de simetría	49
4.4. Colisión elástica de dos piones a primer orden	50

5. Interacciones electromagnéticas y desintegraciones leptónicas débiles	55
5.1. Construcción del lagrangiano	55
5.1.1. Lagrangiano y vértice efectivo a nivel de quarks	55
5.1.2. Lagrangiano y vértice efectivo a nivel de piones	56
5.2. Lagrangiano efectivo para las interacciones nucleares débiles	57
5.3. Desintegración del pión	57
5.3.1. Cálculo del elemento de matriz	57
5.3.2. Longitud de desintegración	59
5.3.3. Comparación entre canales de desintegración	60
5.4. Teoría de Fermi–Cabbibo	60
5.4.1. Lagrangiano de Fermi–Cabbibo	60
5.4.2. Desintegración del muón	60
5.4.3. Desintegración de muones polarizados. Violación de paridad	62
Bibliografía	65

Prólogo

Este documento contiene los apuntes de la parte teórica de la asignatura *Partículas Elementales* que pertenece al plan de estudios del programa de doctorado de *Física Teórica* que se imparte en la «*Facultat de Física*» de la «*Universitat de Barcelona*». Estos apuntes corresponden al curso 2003–2004, y fueron tomados entre el 28 de octubre y el 17 de diciembre de 2003, en aproximadamente quince horas de clase; y han sido pasadas al formato electrónico L^AT_EX entre el 8 y el 28 de enero de 2004.

A lo largo del curso en pizarra se dejan algunos pasos, o resultados adelantados, como ejercicio para el lector. En este documento se recogen los enunciados de todos ellos, dando las soluciones de algunos. También se recoge toda la bibliografía recomendada para seguir el curso, o bien para ahondar en algunos temas.

El presente documento sigue en su mayor parte la misma estructura que el curso en la pizarra. Sin embargo, en algunos instantes, se ha alterado el orden o incluido material extra con tal de adaptar su contenido a una obra escrita. De esta forma, el curso se ha dividido en cinco capítulos.

El capítulo 1, *Introducción*, pretende dar una visión general del mundo de las teorías de partículas elementales; los órdenes de magnitud involucrados, el sistema de unidades naturales que se utiliza y una breve recopilación de todas las partículas que se estudiarán a lo largo del curso.

En el capítulo 2, titulado *Teorías de gauge*, se repasan una serie de conceptos sobre la teoría cuántica de campos con invariancia de gauge. Gran parte de lo que se explica en este capítulo debe ser conocido por los alumnos de un curso de doctorado, pero es preciso repetir su exposición en este curso con tal de fijar una notación, y reenganchar a aquellos alumnos que no hayan escogido asignaturas relacionadas con el tema. En este capítulo se repasarán los conceptos más elementales de la teoría matemática de los grupos continuos, o grupos de Lie. También veremos con detalle el tratamiento de una teoría cuántica de campos con invariancia de gauge local; comenzaremos con el ejemplo conocido de la electrodinámica cuántica (QED), con invariancia $U(1)$. Posteriormente, se generalizarán las técnicas empleadas para el caso de $SU(N)$.

Con el título *Interacción nuclear fuerte. Cromodinámica cuántica*, en el capítulo 3 se aplican gran parte de los conceptos repasados en el capítulo 2 para construir la teoría cuántica de campos de las interacciones fuertes: la cromodinámica cuántica (QCD), cuyo grupo de gauge es $SU(3)$. En primer lugar, analizaremos el fenómeno de la libertad asintótica, según el cual la constante de acoplamiento de QCD disminuye en el límite de altas energías. Gran parte de este tercer capítulo se dedicará al estudio del grupo de simetría $SU(3)$. Veremos como, además de la simetría de color que define el lagrangiano de QCD, en el sector de los tres quarks más ligeros también tenemos la simetría $SU(3)$ de sabor, que no es más que una generalización de la simetría $SU(2)$ de isospin para incluir el quark «strange». Gran parte del capítulo se dedicará al estudio detallado del grupo $SU(3)$, a la caracterización de sus representaciones y a desarrollar técnicas gráficas para obtener la descomposición en representaciones irreducibles del producto directo de dos de ellas. Por último, utilizando estas técnicas, podremos clasificar los hadrones según los multipletes del grupo.

En el siguiente capítulo, *Teorías efectivas*, nos daremos cuenta que, en la aproximación de bajas energías, en que los quarks no aparecen como partículas asintóticas, no tiene sentido trabajar con un lagrangiano a nivel de quarks, sino que en muchas ocasiones podemos conformarnos con un lagrangiano efectivo, donde aparezcan los campos de las partículas físicas formadas por estados de ligados quarks: los hadrones. En este capítulo, obtendremos lagrangianos efectivos, tanto para los bariones que se transforman según el octeto de $SU(3)$, como para aquellos que lo hacen en el decuplete. Para obtener una teoría efectiva de los mesones emplearemos otra táctica: el modelo sigma no lineal. El tratamiento de teorías efectivas nos llevará, por primera vez, a obtener relaciones independientes del modelo, que podrán ser comprobadas experimentalmente: las relaciones de Gell-Mann–Okubo. Por último, estudiaremos el proceso de interacción de cuatro piones, a primer orden.

En el último capítulo del curso, cuyo título es *Interacciones electromagnéticas y desintegraciones leptónicas débiles*, introduciremos en nuestro tratamiento las interacciones electrodébiles. Comenzaremos obteniendo una teoría efectiva mediante técnicas similares a las del capítulo anterior. De nuevo, nos conformaremos con un lagrangiano a nivel de partículas físicas, en vez de quarks. Veremos que, en el límite de bajas energías podemos considerar que el vértice de interacción es puntual, en vez de tener en cuenta que la interacción débil es mediada por las partículas W^\pm y Z . Utilizando las teorías recién obtenidas, realizaremos el cálculo explícito del proceso de desintegración de un pión, que nos servirá para hallar una expresión que pueda ser utilizada para determinar experimentalmente la constante de acoplamiento del modelo. Posteriormente, introduciremos la teoría de Fermi-Cabbibo para las interacciones débiles entre leptones. Para acabar el curso, utilizaremos este modelo para calcular el proceso de desintegración del muón, que nos llevará a observar que, en ocasiones, la interacción débil es capaz de violar la simetría bajo transformaciones de paridad. Esta característica es única y definitoria de la interacción nuclear débil.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo daremos un breve repaso a las nociones más básicas como paso previo al estudio de las diferentes teorías de partículas elementales. En primer lugar, realizaremos un pequeño recordatorio de los órdenes de magnitud en la Física, y en especial los que intervienen en la física de partículas. Seguidamente, recordaremos la definición de las unidades naturales, que nos permiten simplificar la notación y los cálculos. Por último, realizaremos un breve repaso a los nombres y propiedades de las diferentes partículas elementales que aparecen en el *modelo estándar*.

1.1. Dónde estamos

En Física, es muy importante saber en cada momento cual es el orden de magnitud de las diferentes variables que se manejan. No es lo mismo trabajar con las distancias mas grandes, de hasta 10^{26}m , que en las escalas más pequeñas. Tomando como ejemplo las distancias, los diferentes órdenes de magnitud en que se puede desglosar el estudio de las diferentes partes de la naturaleza se muestra en la siguiente tabla.

10^{26}m	Universo conocido
10^{21}m	Galaxia (vía láctea)
10^{18}m	Distancia sol a α -centauri
10^{12}m	Distancia neptuno a la Tierra
10^6m	Diámetro de la tierra
10^0m	Escala humana
10^{-6}m	Células
10^{-10}m	Átomo
10^{-15}m	Núcleo y partículas elementales
10^{-35}m	Distancia de Planck

A lo largo de esta asignatura trataremos tan sólo con las partículas elementales, es decir, nos situamos a la escala de los 10^{-15}m .

1.2. Unidades naturales

Para simplificar la notación, a lo largo de esta asignatura adoptaremos el sistema de unidades naturales, que se caracteriza por elegir las constantes de Planck (reducida) y la velocidad de la luz como adimensionales e iguales a la unidad,

$$\hbar = c = 1 . \quad (1.2.1)$$

El hecho de escoger $c = 1$ nos indica que las unidades de longitud y tiempo serán la misma (podemos hablar de *años-luz* como unidad de distancia, o de *metros-luz* como unidad de tiempo). Esta elección también implica que la masa tendrá la misma dimensionalidad que la energía, dado que

$$[E] = [m][v]^2 = [m] . \quad (1.2.2)$$

Por otra parte, la constante de Planck tiene unidades de acción, energía por tiempo. Por tanto, al ser escogida igual a la unidad tendremos que la unidad de tiempo (y de distancia) será el inverso de la

unidad de energía. Nosotros, tomaremos el criterio de utilizar siempre unidades de energía, usualmente eV (o derivados). Nos será útil, pues, tener en mente los siguientes factores de conversión con el reto de unidades mecánicas,

$$1\text{kg} = 5,61 \cdot 10^{26} \text{GeV} , \quad (1.2.3)$$

$$1\text{m} = 5,07 \cdot 10^{15} \text{GeV}^{-1} , \quad (1.2.4)$$

$$1\text{s} = 1,53 \cdot 10^{24} \text{GeV}^{-1} . \quad (1.2.5)$$

1.3. Breve inventario de partículas elementales

En la naturaleza conocemos un total de cuatro interacciones básicas, que son

Interacción electro-débil Incluye las interacciones nucleares débiles y las electromagnéticas (que también pueden estudiarse, por separado, mediante la *electrodinámica cuántica*, o *QED*). La unificación de estas dos fuerzas en la teoría electro-débil (EW) valió el premio Nobel de física de 1979 a Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg.

Interacción fuerte La teoría más exitosa de las interacciones fuertes es la cromodinámica cuántica (QCD).

Gravitación La última teoría aceptada totalmente por la comunidad científica es la Relatividad General de Einstein, de 1916–1917. Los diferentes intentos por realizar una teoría cuántica de la gravedad, gravitación cuántica, súpergravedad, etc., han fracasado debido a incoherencias internas. En la actualidad el único candidato fiable que tenemos para incluir la gravitación en un marco cuántico es la teoría de súpercuerdas.

Todas las partículas interactúan mediante la gravitación, mediante el intercambio de partículas virtuales llamadas *gravitones*. No obstante, esta interacción es despreciable a las escalas de la física de partículas, y por lo tanto no la tendremos en cuenta a lo largo de la asignatura.

Las partículas que tan sólo interactúan mediante la interacción electro-débil, además de la gravitación, se llaman *leptones*, todos ellos tienen spin $s = 1/2$ y vienen clasificados en tres familias,

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} ,$$

más sus correspondientes antipartículas. Para las masas de los neutrinos, experimentalmente, tan sólo tenemos cotas superiores, y hasta hace poco se pensaba que podían no tener masa; si bien, actualmente parece comprobado que sí tienen cierta masa, aunque muy pequeña. La masa de los leptones es, pues,

$$\begin{aligned} m_e &= 0,511 \text{MeV} , & m_{\nu_e}^2 &< 3 \text{eV} , \\ m_\mu &= 105,658 \text{MeV} , & m_{\nu_\mu}^2 &< 0,19 \text{MeV} , \\ m_\tau &= 1776,98 \text{MeV} , & m_{\nu_\tau}^2 &< 18,2 \text{MeV} . \end{aligned}$$

Las partículas que interactúan a través de la interacción nuclear fuerte, además de la interacción electro-débil, se llaman *hadrones*, y todos ellos están formados a partir de combinaciones de dos o tres quarks. En total, existen seis quarks, todos ellos con spin $s = 1/2$, agrupados en tres familias,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} .$$

Dado que los quarks no se pueden obtener como estados asintóticos aislado, resulta complicado definir de forma precisa su masa. Una de las formas más convenientes consiste en introducir una escala de renormalización,

$$\begin{aligned} m_u(2\text{GeV}) &\approx 2\text{--}8 \text{MeV} , & m_d(2\text{GeV}) &\approx 5\text{--}15 \text{MeV} , \\ m_s(2\text{GeV}) &\approx 150 \text{MeV} , & m_c(m_c) &\approx 1,2 \text{GeV} , \\ m_b(m_b) &\approx 4,2 \text{GeV} . \end{aligned}$$

Para los quarks más pesados, resulta más conveniente definir la *masa «on shell»*, que sería la definición más parecida a la masa libre de otras partículas (como por ejemplo, los leptones). Las masas «on shell» para los tres quarks más pesados son

$$\begin{aligned} m_c^{0.s.} &= 1,2\text{GeV} , & m_b^{0.s.} &= 4,9\text{GeV} , \\ m_t^{0.s.} &= 174\text{GeV} . \end{aligned}$$

Lo primero que nos llama la atención es que la masa de los tres quarks más ligeros —«up», «down» y «strange»—, es mucho menor que la de los otros tres. Por lo tanto, tiene sentido, como primera aproximación, tomar su masa igual a cero. Otra aproximación que se suele hacer es considerar la masa de los tres quarks ligeros iguales entre sí¹. Una mejora a esta aproximación es considerar tan sólo iguales las masas de los quarks «up» y «down», aproximación que da lugar a la simetría de isospin.

La interacción partículas está mediada mediante partículas *portadoras*, todas ellas de spin $s = 1$ (excepto el gravitón, que se supone que tiene spin $s = 2$). Las diferentes partículas portadoras son las siguientes:

Fotón, γ Es la partícula encargada de mediar la interacción electromagnética y, por lo tanto, se acopla con las partículas cargadas eléctricamente según el lagrangiano de QED. Teóricamente, su masa es nula, pero la mejor cota experimental que tenemos es $M_\gamma < 2 \cdot 10^{-16}$.

Bosones W^\pm y Z Son las partículas encargadas de transportar la interacción débil, por lo que se acoplan con todas las partículas con *carga de sabor* según el lagrangiano de EW. Sus masas son $M_W = 80,4\text{GeV}$ y $M_Z = 91,1874\text{GeV}$.

Gluones, g_a Su nombre es debido a que son las partículas encargadas de mantener unidos los quarks en el interior de los hadrones, ya que son los transmisores de la interacción nuclear fuerte. Según el lagrangiano de QCD se acoplan a todas las partículas con *carga de color*. Existen un total de ocho gluones, $a = 1, \dots, 8$, todos ellos sin masa (según la teoría).

La teoría que describe las propiedades de todas las partículas enumeradas, y sus interacciones, es el modelo estándar. Puede encontrarse mayor información sobre las diferentes partículas en [1].

¹Aunque la masa del quark «strange» es bastante diferente a la de «up» y «top», esta aproximación tiene sentido si comparamos sus masas con la de los tres quarks restantes.

Capítulo 2

Teorías de gauge

En este capítulo realizaremos una breve introducción a las teorías de campos con simetrías de gauge. Esta tipo de teorías son capaces de describir las interacciones electromagnéticas (QED), electro-débiles (EW) y fuertes (QCD), por lo que representan una herramienta fundamental en la física de partículas.

Para comenzar el capítulo, realizaremos un pequeño repaso a las principales propiedades de los grupos y álgebras de Lie, que nos serán de utilidad al largo de toda la asignatura. A continuación, y también a modo de repaso, recordaremos el tratamiento de QED, donde la simetría gauge se implementa mediante el grupo abeliano $U(1)$.

La tercera parte del capítulo está dedicada a las teorías de gauge no abelianas. Iniciaremos su estudio construyendo su lagrangiano, siguiendo un procedimiento análogo al que se utiliza para el caso de QED. Seguidamente, destacaremos el caso del grupo $SU(3)$, que implementa la simetría de color de QCD. Por último, daremos —sin demostrar— una serie de recetas útiles para hallar las reglas de Feynman asociadas a una teoría gauge general.

2.1. Repaso de teoría de grupos. Grupo $SU(N)$

2.1.1. Grupos de Lie

En primer lugar, realizaremos un pequeño repaso a la teoría de grupos aplicada al grupo $SU(N)$, que es el más utilizado en la teoría de las partículas elementales a nivel que la vamos a tratar.

El grupo $U(N)$ está formado por todas las matrices $N \times N$ unitarias. Es un grupo respecto de la multiplicación matricial, ya que el producto de dos matrices unitarias también es unitaria. El subgrupo $SU(N)$ está formada por aquellas matrices unitarias con determinante unidad.

Una de las principales características de los grupos de Lie es que son continuos, es decir, localmente son isomorfos a \mathbb{R}^N , donde N es la dimensión del grupo. Este hecho nos permite parametrizar los elementos del grupo mediante N parámetros, α^i . Por convenio, tomamos $U(0) = \mathbb{1}$.

De la teoría general de los grupos de Lie [2, 3], sabemos que todo elemento de $SU(N)$ se puede escribir como una exponencial de las matrices de un álgebra de Lie asociada,

$$U(\alpha) = e^{iA} . \quad (2.1.1)$$

Dado que U es unitaria, las matrices A del álgebra deben ser hermíticas,

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \mathbb{1} \\ &= e^{-iA^\dagger} e^{iA} = e^{i(A-A^\dagger)} . \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

El hecho de que el determinante de las matrices del grupo determinante unidad, $\det U = 1$, nos restringe aún más cual es el álgebra asociada al grupo, ya que

$$\begin{aligned} \det U &= 1 \\ &= \det e^{iA} = e^{i\text{tr}A} , \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

o sea, las matrices del álgebra no deben tener traza, $\text{tr}A = 0$. La condición de hermiticidad determina todos los elementos bajo la diagonal, y fuerza a los elementos sobre la diagonal a ser reales. Por lo tanto,

tenemos un total de $n + 2 \times n(n-1)/2 = n^2$ grados de libertad reales (cada número complejo aporta dos grados de libertad reales). La condición de traza nula impone una nueva condición más (tan sólo una, ya que todos los elementos de la diagonal deben ser reales). Así, pues, el número de grados de libertad en las matrices del álgebra es $n^2 - 1$.

2.1.2. Álgebras de Lie

Hasta este momento hemos mencionado repetidamente el concepto de álgebra de Lie, aunque no las hemos definido formalmente. Una álgebra de Lie, L , es un espacio vectorial, sobre los reales, \mathbb{R} , o los complejos, \mathbb{C} ; tal que tenemos definido un producto interno,

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L, \\ (A, B) &\longmapsto [A, B], \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

que llamamos *paréntesis de Lie*, y que debe cumplir las siguientes propiedades,

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha [A, C] + \beta [B, C], \quad (2.1.5)$$

$$[A, B] = -[B, A], \quad (2.1.6)$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (2.1.7)$$

Para las álgebras que admiten representación matricial, el paréntesis de Lie suele coincidir con el conmutador, que satisface las mismas propiedades.

Dado que la álgebra de Lie es un espacio vectorial, pueden hallarse infinitas bases diferentes. La base más conveniente es la que se obtiene por derivación a partir de los elementos del grupo,

$$T_i = \left. \frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}, \quad (2.1.8)$$

donde las matrices T_i son los *generadores del grupo*, y forman una base completa. Por este motivo, podemos descomponer el paréntesis de Lie en esta base,

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k, \quad (2.1.9)$$

donde C_{ij}^k son las *constantes de estructura* del grupo. Para demostrar este hecho, debemos tener en cuenta que el producto de dos elementos del grupo, $U(\alpha)$ y $g(\beta)$, también es un elemento del grupo,

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\tau(\alpha, \beta)). \quad (2.1.10a)$$

Por otra parte, si las constantes de estructura no son nulas, el producto interno del grupo de Lie no es conmutativo,

$$U(\beta)U(\alpha) = U(\tau(\beta, \alpha)). \quad (2.1.10b)$$

Por otra parte, cualquier elemento del álgebra se puede poner como una combinación lineal de los generadores, $A = A^i T_i$, por lo que la ecuación (2.1.1) se puede expandir por Taylor cuando los parámetros son pequeños (al rededor de la transformación unidad),

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^i T_i} = \mathbb{1} + i\alpha^i T_i - \frac{1}{2}\alpha^i \alpha^j T_i T_j + \dots \quad (2.1.11)$$

lo que se conocemos como *transformación infinitesimal*. Con lo cual, la expansión por Taylor de las ecuaciones (2.1.10) son

$$U(\alpha)U(\beta) = 1 + i\alpha^i T_i + i\beta^j T_j - \alpha^i \beta^j T_i T_j - \frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \beta^i \beta^j) T_i T_j + o(\alpha, \beta)^3, \quad (2.1.12a)$$

$$U(\beta)U(\alpha) = 1 + i\alpha^i T_i + i\beta^j T_j - \alpha^i \beta^j T_j T_i - \frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \beta^i \beta^j) T_i T_j + o(\alpha, \beta)^3, \quad (2.1.12b)$$

Restando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos la siguiente igualdad

$$U(\alpha)U(\beta) - U(\beta)U(\alpha) = -\alpha^i \beta^j (T_i T_j - T_j T_i) + o(\alpha, \beta)^3 . \quad (2.1.13)$$

Por otra parte, como el producto de dos elementos del grupo también pertenece a él, podemos realizar la expansión de Taylor directamente al elemento compuesto, $U(\tau(\alpha, \beta)) = U(\alpha)U(\beta)$. El resultado que se obtendría es

$$\begin{aligned} U(\tau(\alpha, \beta)) &= U(\alpha)U(\beta) \\ &= \mathbb{1} + i\tau^i T_i - \frac{1}{2}\tau^i \tau^j T_i T_j + o(\tau)^3 . \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Para comparar las diferentes expresiones al mismo orden, es necesario expandir por Taylor también la función $\tau(\alpha, \beta)$,

$$\tau(\alpha, \beta) = \tau(0, 0) + \alpha^i \partial_{\alpha^i} \tau|_{\alpha=0} + \beta^j \partial_{\beta^j} \tau|_{\beta=0} + \Delta(\alpha, \beta) + o(\alpha, \beta)^3 , \quad (2.1.15)$$

donde $\Delta(\alpha, \beta) = o(\alpha, \beta)^2$. Debido a que $U(0) = \mathbb{1}$, se siguen las siguientes propiedades,

$$U(0)U(0) = 1 \longrightarrow \tau(0, 0) = 0 , \quad (2.1.16)$$

$$U(0)U(\alpha) = U(\alpha) \longrightarrow \tau(\alpha, 0) = \alpha . \quad (2.1.17)$$

La primera propiedad elimina directamente el orden cero de la expansión de τ . La segunda propiedad nos asegura que

$$\partial_{\alpha^i} \tau|_{\alpha=0} = \partial_{\beta^j} \tau|_{\beta=0} = 1 , \quad (2.1.18)$$

hecho que se de la comparación orden a orden de la expansión (2.1.14) haciendo $\beta = 0$, con la expansión para $U(\alpha)$, ec. (2.1.11). Con todo esto, la ecuación (2.1.14) queda de la forma

$$U(\tau(\alpha, \beta)) = \mathbb{1} + i(\alpha + \beta + \Delta)^i T_i - \frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \beta^i \beta^j - \alpha^i \beta^j - \beta^i \alpha^j) T_i T_j + o(\alpha, \beta)^3 , \quad (2.1.19)$$

donde en el paréntesis que acompaña a $T_i T_j$ no aparece ningún término con Δ ya que τ no tiene término de orden cero, y cualquier producto que contenga Δ sería de orden $o(\alpha, \beta)^3$, o superior. Ahora, la diferencia de la ecuación (2.1.13) ahora se escribirá de la forma

$$U(\tau(\alpha, \beta)) - U(\tau(\beta, \alpha)) = -(\Delta - \Delta')^i T_i + o(\alpha, \beta)^3 , \quad (2.1.20)$$

donde $\Delta' = \Delta(\beta, \alpha)$. Si el grupo no es abeliano, podemos tener $\Delta \neq \Delta'$. Comparando las ecuaciones (2.1.20) y (2.1.13) tenemos, finalmente,

$$\alpha^i \beta^j [T_i, T_j] = (\Delta - \Delta')^k T_k , \quad (2.1.21)$$

lo que significa que el conmutador de dos generadores es proporcional a una combinación lineal de los propios generadores. Ésta es la definición de álgebra de Lie. Esto completa la demostración.

2.1.3. Teoría de representaciones

A menudo los difernetes grupos de Lie se definen pensando en un determinado tipo de matrices, que cumplen ciertas condiciones; por ejemplo, el grupo $SU(3)$ se define pensando en matrices 3×3 unitarias y determinante unidad. Sin embargo, una vez caracterizado el grupo y conocidas sus relaciones de conmutación, tiene sentido preguntarse si existen otro tipo de matrices, Γ^a , quizá de otra dimensión, que satisfaga la misma álgebra de Lie,

$$[\Gamma^a, \Gamma^b] = i f^{abc} \Gamma^c . \quad (2.1.22)$$

Es decir, nos preguntamos si existe más *representaciones*, además de la que se utiliza para dar nombre al grupo, que llamaremos *representación fundamental*.

Diremos que dos representaciones, Γ^a y Θ^a , son equivalentes si están relacionadas por una relación de semejanza, es decir, si existe una matriz ξ tal que

$$\xi(\Theta^a)\xi^{-1} = \Gamma^a, \quad \forall a. \quad (2.1.23)$$

Dada una representación, Γ^a , podemos definir otra nueva representación, su *compleja conjugada*, $-\Gamma^{*a}$, tal que

$$[\Gamma^{*a}, \Gamma^{*b}] = -if^{abc}\Gamma^{*c}. \quad (2.1.24)$$

Por último, diremos que una representación, Γ^a , es real si es equivalente a su compleja conjugada, $-\Gamma^{*a}$. Veremos un ejemplo de representación real en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.1.1 Sean f_{abc} las constantes de estructura del grupo $SU(3)$, dadas por la ecuación (2.3.15). Definimos un total de ocho matrices 8×8 de la forma

$$(\gamma_a)_{ij} = -if_{aij}. \quad (2.1.25)$$

Estas matrices satisfacen una álgebra de Lie. Demostrad que es una representación real.

Solución Dado que las constnate de estructura de $SU(3)$ son totalmente antisimétricas y reales, cada una de las matrices Γ_a son antisimétricas, y todos sus elementos son puramente imaginários, debido al factor $(-i)$ en su definición. Por lo tanto, las matrices són hermiticas, ya que tomar el complejo congujado tan sólo afecta en un signo global, que se compensa con el signo correspondiente a transponer una matriz antisimétrica. Por lo tanto, de hecho, las matrices de la representación compleja congujada son iguales a las originales, y por lo tanto son equivalentes. Ésto completa la demostración.

2.2. Electrodinámica cuántica (QED)

Consideramos una partícula de spin $s = 1/2$ y que, por tanto, obedece la ecuación de Dirac, que se puede deducir del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad \text{donde } \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \quad (2.2.1)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac, que satisfacen el álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.2.2)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio. Las primeras representaciones de esta álgebra aparecen en las matrices 4×4 . La que utilizaremos en este curso es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$

donde $\mathbb{1}$ es la identidad 2×2 , y σ_i son las matrices de Pauli. Esta es la *representación de Dirac* de la álgebra de Clifford. Existen otras representaciones, útiles en otros contextos, como la representación quiral, o la de Majorana.

Este lagrangiano es obviamente invariante bajo transformaciones $U(1)$ globales, que se implementan simplemente cambiando la fase del campo ψ . Nos preguntamos si existe alguna forma de promover esta invariancia a transformaciones $U(1)$ locales, donde la fase dependa del punto concreto del espacio-tiempo,

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad (2.2.4a)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}, \quad (2.2.4b)$$

donde Q es una constante (carga eléctrica del fermión en cuestión) y $\alpha(x)$ es una función escalar real. El término de masas del lagrangiano (2.2.1) sigue siendo invariante bajo este tipo de transformaciones. No obstante, el término cinético no lo es, ya que según la regla de la cadena para las derivadas, tenemos

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - Q\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.2.5)$$

Para que este término sea invariante, y por ende el lagrangiano completo, debemos definir la *derivada covariante*,

$$D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu Q, \quad (2.2.6)$$

donde A_μ es el *potencial cuadvivector*, que juega el papel análogo a la *conexión riemanniana* en geometría diferencial. Esta nueva derivada debe transformarse de forma covariante,

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)Q} D_\mu \psi, \quad (2.2.7)$$

que se cumplirá siempre y cuando el potencial cuadvivector se transforme de la forma adecuada,

$$\begin{aligned} D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + ieA'_\mu Q) e^{i\alpha(x)Q} \psi \\ &= e^{i\alpha(x)Q} \left(i(\partial_\mu \alpha(x))Q + (\partial_\mu \psi) + ieA'_\mu Q \right) \psi \\ &\equiv e^{i\alpha(x)Q} \left((\partial_\mu \psi) + ieA_\mu Q \right) \psi \\ &= e^{i\alpha(x)Q} D_\mu \psi, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

de donde deducimos que la transformación gauge del potencial debe ser

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.2.9)$$

Ahora, el potencial cuadvivector pasa a formar parte de nuestra teoría, por lo que necesitamos incluir en el lagrangiano su término cinético. Dicho término debe ser también invariante bajo la transformación gauge local $U(1)$, ec. (2.2.4). Un posible invariante se puede construir a partir del conmutador de las derivadas covariantes, que en la geometría diferencial define el tenso de curvatura,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + ieA_\mu Q, \partial_\nu + ieA_\nu Q] \\ &= ieQ [\partial_\mu, A_\nu] + ieQ [A_\mu, \partial_\nu] \\ &= ieQ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

El término ente paréntesis en el último paso de la ecuación (2.2.10) nos recuerda a la definición del tensor de Faraday (ver, por ejemplo, [4, 5]),

$$[D_\mu, D_\nu] = ieQ F_{\mu\nu}. \quad (2.2.11)$$

Este procedimiento nos ha servido para demostrar que $F_{\mu\nu}$ es invariante gauge. El término cinético debe ser cuadrático,

$$\mathcal{L}_{\text{cin. } A_\mu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.2.12)$$

donde el factor $-1/4$ se añade por conveniencia. La justificación última de este lagrangiano es que de él se pueden obtener las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. La comprobación de este hecho se deja como ejercicio para el lector.

Ejercicio 2.2.1 Deduce las ecuaciones de Maxwell a partir el lagrangiano de la ecuación (2.2.12) como ecuaciones del movimiento para A_μ . Es decir, imponiendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{cin. } A_\mu}}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (2.2.13)$$

Utiliza la identificación $F_{ij} = -\varepsilon_{ij} B_i$, $F_{0i} = -E_i$, donde E_i y B_i son el campo eléctrico y magnético, respectivamente. También se deben tener en cuenta las propiedades de simetría del tensor de Faraday.

Así, pues, el lagrangiano de QED se puede escribir, finalmente, de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.2.14)$$

donde $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

No podemos añadir más términos al lagrangiano, si no es a costa de hacer que no sea renormalizable, o de romper alguna simetría. Las principales razones son:

- El producto de más de cuatro campos no dan lugar a teorías renormalizables, por argumentos de análisis dimensional, [6, 7]. Ésto prohíbe términos del tipo $\bar{\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \phi$.
- El resto de términos rompe alguna de las simetrías observadas en la naturaleza. Por ejemplo el término $F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ viola la simetría bajo transformaciones de paridad.

2.3. Teorías gauge no abelianas

2.3.1. Construcción del lagrangiano

En esta ocasión consideramos el lagrangiano de un campo fermiónico de spin $s = 1/2$, que viene descrito por

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

El lagrangiano se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_1 (i\not{D} - m_1) \psi_1 + \cdots + \bar{\psi}_N (i\not{D} - m_N) \psi_N, \\ &= \bar{\Psi} (i\not{D} - M) \Psi, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

donde $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$ es la matriz de masas. De nuevo, este lagrangiano es invariante bajo transformaciones del tipo

$$\Psi(x) \longrightarrow U(\alpha) \Psi(x), \quad (2.3.3)$$

donde $U(\alpha)$ es un elemento de un *grupo de Lie*, G , que viene parametrizado por las variables $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^N)$. De la teoría de grupos de Lie, se puede demostrar (ver [2, 3]) que todo elemento del grupo se puede escribir como una exponencial,

$$U(\alpha) = e^{i \frac{\tau^a}{\sqrt{2}} \alpha^a}, \quad (2.3.4)$$

donde τ^a son las matrices que general el *álgebra de Lie* asociada a G , y se conocen con el nombre de *generadores de G* . Por ser un álgebra de Lie, cumplen una relación del tipo

$$\left[\frac{\tau^a}{\sqrt{2}}, \frac{\tau^b}{\sqrt{2}} \right] = i f^{abc} \frac{\tau^c}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.5)$$

donde f^{abc} son las *constantes de estructura* del grupo, y debe ser totalmente antisimétrico en sus tres índices. En el caso de $SU(N)$, existen $N^2 - 1$ generadores, por lo que $a, b, c = 1 \div N$.

Debemos fijarnos en que para que el lagrangiano sea simétrico respecto a esta transformación, los elementos del grupo $U(\alpha)$ deben ser unitarios, $U^{-1} = U^\dagger$, lo que nos impone que los generadores sean hermíticos, $\tau^\dagger = \tau$. También es importante que la masa asociada a cada una de las componentes sea la misma, o lo que es lo mismo, que la matriz de masas sea proporcional a la identidad, $M = m\mathbb{1}$.

En analogía con lo hecho en la sección anterior, queremos promocionar la simetría a ser local, es decir $\alpha^a = \alpha^a(x)$. Ello nos llevará a definir la derivada covariante,

$$D_\mu := \partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{\sqrt{2}} A_\mu^a. \quad (2.3.6)$$

Normalmente, se utiliza la notación $A_\mu = \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a$. Para que exista invariancia local, el potencial A_μ debe transformarse según

$$A_\mu \longrightarrow U A_\mu U^\dagger + ig (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (2.3.7)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso $U(1)$, para hallar el término cinético del potencial A_μ necesitamos calcular el conmutador de dos derivadas covariantes,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= ig F_{\mu\nu} \\ &= ig \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu] \right), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} [A_\mu, A_\nu] &= \left[\frac{\tau^a}{\sqrt{2}} A_\mu^a, \frac{\tau^b}{\sqrt{2}} A_\nu^b \right] \\ &= i f^{abc} \frac{\tau^c}{\sqrt{2}} A_\mu^a A_\nu^b . \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

De nuevo, el tensor $F_{\mu\nu}$ se transforma de forma homogénea,

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger . \quad (2.3.10)$$

El término cinético se formará como el cuadrado de $F_{\mu\nu}$. En este caso, deberemos sumar sobre los índices internos, lo que se puede expresar de forma compacta tomando la traza. Así, pues, el lagrangiano final es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (2.3.11)$$

o bien, escribiendo explícitamente los índices internos,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_m (i \not{D} - m)_{mn} \Psi_n - \frac{1}{4} \text{tr} \left[(F_{\mu\nu})^{mn} (F^{\mu\nu})_{mn} \right] . \quad (2.3.12)$$

Debido a los términos no abelianos que aparecen al considerar el grupo $SU(N)$, aparecen nuevas partes del lagrangiano que contienen de autointeracción de las partículas gauge, que vienen descritas por A_μ . Es decir, en las teorías no abelianas, las partículas transmisoras también participan de la interacción, en vez de limitarse a propagarla como en el caso del electromagnetismo, que se describe mediante una teoría invariante bajo transformaciones de $U(1)$, que es un grupo abeliano, y que por lo tanto no da lugar a términos con conmutadores. Por ejemplo, en la teoría aparecen nuevos vértices a tres bosones de gauge, que provienen del producto del conmutador campo A_μ por el tensor $F_{\mu\nu}$; y términos de cuatro bosones de gauge, que provienen del producto de dos conmutadores del campo. Es decir, de forma diagramática, nos aparecerán vértices del tipo,

$$\longrightarrow (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A^\mu, A^\nu] , \quad (2.3.13)$$

$$\longrightarrow [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] \quad (2.3.14)$$

2.3.2. Cromodinámica cuántica (QCD)

La QCD es la teoría de las interacciones fuertes de los quarks. Como ya vimos en el capítulo anterior, tenemos seis tipos, *sabores*, de quarks: «up, down, strange, charm, bottom y top». QCD es la teoría gauge del grupo $SU(3)$ de color, que tiene 8 generados, λ_a , que se puede representar con las matrices de Gell-Mann,¹

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

¹Para las matrices de Gell-mann es usual usar la notación λ^a en vez de τ^a , por convenio.

Por otra parte, las constantes de estructura no nulas del grupo $SU_c(3)$ son

$$\begin{aligned} f_{123} = 1, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

donde hemos elegido el criterio de normalización

$$\left[\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right] = i\sqrt{2} f^{abc} \frac{\lambda^c}{\sqrt{2}}. \quad (2.3.16)$$

Por lo tanto, el lagrangiano de QCD es el correspondiente al grupo $SU_c(3)$ para cada uno de los colores, con la normalización

$$\text{tr} \left(\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right) = \delta^{ab}. \quad (2.3.17)$$

Con lo cual, las funciones de onda de cada quark, q_{in} , tendrán un índice de color, n (que normalmente no se escribe, ya que se da por sobreentendido), y un índice de sabor i . Finalmente, el lagrangiano de QED será

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_i \bar{q}_i (i\not{D} - m_i) q_i - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a. \quad (2.3.18)$$

Debido a que el grupo $SU_c(3)$ tiene ocho generadores, existen ocho tipos de partículas portadoras de la interacción fuerte, que llamamos *gluones*.

2.3.3. Reglas de Feynman generalizadas

A continuación vamos a dar, sin demostración, las reglas de Feynman generalizadas, que servirán para todos los lagrangianos que contengan objetos bosónicos, con spins 0 i 1, y fermiónicos de spin 1/2. En general, es posible escribir el lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \int dy \left\{ \frac{1}{2} \phi_i(x) P_{ij} \phi_j(y) + \chi_i^*(x) V_{ij}(x-y) \chi_j(y) + \bar{\psi}_i X_{ij}(x-y) \psi_j \right\} + \mathcal{L}_I(x), \quad (2.3.19)$$

donde la integral representa la suma de términos cinéticos, y \mathcal{L}_I el término de interacción. Por ejemplo, en caso del lagrangiano de Klein-Gordon,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi(x) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x), \quad (2.3.20)$$

debemos elegir

$$P_{ij}(x-y) = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \delta^{ij}, \quad V_{ij}(x-y) = X_{ij}(x-y) = 0. \quad (2.3.21)$$

Propagadores de Feynman

Como siempre, en las reglas de Feynman intervendrán los propagadores de los diferentes campos involucrados en la teoría. Para hallarlos, debemos invertir los operadores que aparecen en el lagrangiano mediante la transformada de Fourier. Por ejemplo, en el caso de escalares, $V_{ij} = P_{ij} = 0$, en el espacio de momentos, tenemos

$$\int dy \sum_j P_{ij}(x-y) P_{jl}^{-1}(x-z) = \delta_{il} \delta^4(x-z). \quad (2.3.22)$$

La transformada de Fourier será

$$P_{jl}^{-1} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{P}_{jl}^{-1}(k), \quad (2.3.23)$$

donde el propagador de Feynman, en espacio de momentos, será $i\tilde{P}_{jl}^{-1}(k)$. Para los tres tipos de partículas que estudiamos, los resultados que se obtienen son los siguientes:

Escalar (spin $s = 0$) Como por ejemplo, el bosón de Higgs. El propagador es

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} .$$

Fermiones (spin $s = 1/2$) Como por ejemplo, los quarks o los electrones. Su propagador se escribe de la forma

$$\frac{i}{\not{p} - m^2 + i\varepsilon} .$$

Bosón vectorial (spin $s = 1$, con masa) El propagador de los bosones vectoriales (con masa) es

$$i \frac{-g_{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} .$$

Bosón de gauge (spin $s = 1$, sin masa) En general, el propagador de los bosones de gauge es

$$\frac{i}{q^2 + i\varepsilon} \left(-g_{\mu\nu} + (1 - a) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) .$$

En la práctica, debemos fijar un gauge determinado para hacer los cálculos. En el *gauge covariante* debemos añadir un término extra al lagrangiano, $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2a} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2$. También es útil en ocasiones el *gauge de Coulomb*, donde el término extra es $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2a} \left(\partial_i A^i \right)^2$, y el propagador se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \text{Parte longitudinal: } \langle A_0^a A_0^b \rangle &\sim \delta^{ab} \frac{i}{q^2} , \\ \text{Parte transversal: } \langle A_i^a A_j^b \rangle &\sim \delta^{ab} \frac{i}{q^2 + i\varepsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) . \end{aligned}$$

Término de interacción

Usualmente, el término de interacción contiene productos de los diversos campos de la teoría. Si el número de campos que contiene el término es N , los diagramas de Feynman contendrán vértices donde confluyan N propagadores. En general, el término de interacción se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) = & \int d^4x_1 \cdots d^4x_N \alpha_{i_1 \dots i_N}(x; x_1, \dots, x_N) \\ & \times \bar{\psi}_{i_1}(x_1) \cdots \psi_{i_m}(x_m) \cdots \phi_{i_n}(x_n) \cdots \chi_{i_p}^*(x_p) \cdots \chi_{i_q}(x_q) \cdots , \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

donde $1 \leq m \leq n \leq p \leq q \leq N$. La transformada de Fourier del coeficiente α viene dada, como de costumbre, por

$$\alpha_{i_1 \dots i_N}(x; x_1 \cdots x_N) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_N}{(2\pi)^4} e^{-ik_1 \cdot (x-x_1)} \cdots e^{-ik_N \cdot (x-x_N)} \tilde{\alpha}_{i_1 \dots i_N}(k_1, \dots, k_N) . \quad (2.3.25)$$

La contribución de cada vértice de interacción vendrá dada por

$$I(k_1, \dots, k_N) = i \sum_{P(1, m-1)} \sum_{P(m, n-1)} \sum_{P(p, q-1)} \sum_{P(q, N)} (-1)^{P_{\text{ferm}}} \tilde{\alpha}_{i_1 \dots i_N}(k_1, \dots, k_N) . \quad (2.3.26)$$

donde las sumas se realizan sobre todas las permutaciones de los índices correspondientes, y el signo depende de la paridad de las permutaciones sobre los fermiones.

Además, si el diagrama tiene loops, en cada vértice tenemos que añadir la delta de Dirac de conservación de momentos. Finalmente, se debe integrar sobre los momentos internos. Para completar las reglas

de Feynman, tenemos que añadir factores debidos a los fermiones y antifermiones externos,

$$p = u(p) , \quad p = \bar{u}(p) , \quad (2.3.27)$$

$$-p = \bar{v}(p) , \quad -p = v(p) , \quad (2.3.28)$$

donde los propagadores indicados con momento negativo se refieren a antipartículas.

Veremos más claramente estos conceptos mediante un simple ejercicio.

Ejercicio 2.3.1 (Teoría $\lambda\phi^4$ escalar) *Haya las reglas de Feynman para la teoría $\lambda\phi^4$ escalar, donde el lagrangiano de interacción es*

$$\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 . \quad (2.3.29)$$

Solución *Lo primero que necesitamos es escribir el término de interacción de la forma (2.3.24),*

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i \delta^4(x - x_i) \phi(x_i) , \quad (2.3.30)$$

con lo cual

$$\alpha(x; x_1, \dots, x_N) = -\frac{\lambda}{4!} \prod_{i=1}^4 \delta^4(x - x_i) , \quad (2.3.31)$$

i la transformada de Fourier es

$$\tilde{\alpha} = -\frac{\lambda}{4!} . \quad (2.3.32)$$

En este caso, tenemos 4 patas externas, todas ellas escalares. Por lo tanto, tenemos un total de $4!$ permutaciones, con lo que tenemos

$$I(k_1, \dots, k_N) = -i\lambda . \quad (2.3.33)$$

Ejercicio 2.3.2 (Grupo $SU(2)$) *Obtener las reglas de Feynman para el grupo $SU(2)$. Los resultados pueden contrastarse con [8].*

2.4. Helicidad y quiralidad

2.4.1. Helicidad

En líneas generales, se puede decir que la helicidad es la generalización relativista del concepto de spin. En concreto, es la proyección sobre el momento del spin. En esta sección, vamos a estudiar la helicidad de los fermiones de spin $s = 1/2$.

La ecuación de Dirac libre contiene soluciones de energía positiva y negativa,

$$\psi_+(x) = u(p)e^{-ip \cdot x} , \quad \text{donde } (\not{p} - m)u(p) = 0 , \quad E > 0 , \quad (2.4.1)$$

$$\psi_-(x) = v(p)e^{ip \cdot x} , \quad \text{donde } (\not{p} + m)v(p) = 0 , \quad E < 0 , \quad (2.4.2)$$

donde $E = p^0$. Nos interesaría encontrar un nuevo operador que rompa la degeneración, es decir, cuyo valor propio pueda utilizarse como número cuántico que nos informe del spin. Una posibilidad sería el operador γ_5 , que se define como

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 . \quad (2.4.3)$$

Sin embargo, esta no sería una buena elección ya que $[\gamma_5, \not{p}] \neq 0$, y deberíamos reconstruir nuestro *conjunto completo de observables compatibles*. Así, pues nos podemos plantear buscar un nuevo operador $\gamma_5 \not{p} = \gamma_5 \gamma_\mu \omega^\mu$ tal que

$$[\gamma_5 \not{p}, \not{p}] = 0 . \quad (2.4.4)$$

Desarrollando la condición (2.4.4), obtenemos

$$\begin{aligned} [\gamma_5 \not{p}, \not{p}] &= \omega^\mu p^\nu [\gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= \omega^\mu p^\nu (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu) \\ &= \omega^\mu p^\nu \gamma_5 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} , \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que γ_5 anticonmuta con todos los γ_μ (dado que estamos en una teoría con dimensionalidad par). Como las matrices de Dirac satisfacen el álgebra de Clifford, ec. (2.2.2), tenemos

$$[\gamma_5 \not{p}, \not{p}] = 2\gamma_5 (\omega \cdot p) . \quad (2.4.6)$$

Por lo tanto, la condición (2.4.4) se traduce en

$$\omega \cdot p = 0 , \quad (2.4.7)$$

es decir, ω ha de ser perpendicular al cuadrimomento. Fijaremos la normalización de forma que ω sea de tipo espacio, con $\omega^2 = -1$. Arbitrariamente, por conveniencia, añadimos un factor $1/2$ al operador, con lo cual tenemos,

$$\frac{1}{2} \gamma_5 \not{p} , \quad \text{donde } \omega \cdot p = 0 , \quad \omega^2 = -1 . \quad (2.4.8)$$

Si nos situamos en el sistema centro de masas, donde la partícula se encuentra en reposo (clásicamente), el momento se expresa de la forma $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. La condición de ortogonalidad nos permite escribir $\omega^\mu = (0, \mathbf{k}) = (0, 0, 0, 1)$. En estas condiciones, la ecuación de Dirac para la parte de partículas, $u(p)$, se resuelve de forma trivial,

$$(\not{p} - m)u = 0 \longrightarrow m(\gamma^0 - \mathbb{1})u = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u = 0 , \quad (2.4.9)$$

y por lo tanto, tenemos dos tipos de soluciones,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.4.10)$$

Para obtener las dos soluciones de tipo antipartícula, $v(p)$, el procedimiento es análogo, pero con el signo relativo contrario en la ecuación (2.4.9), con lo que los dos tipos de soluciones son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.4.11)$$

La interpretación del operador de helicidad como una generalización del spin para partículas relativistas, se fundamenta en el hecho de que, en el sistema centro de masas, éste se reduce al operador de spin en la dirección de $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

$$\frac{1}{2} \gamma_5 \not{p} = -\frac{1}{2} \gamma_5 \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & -\sigma^3/2 \end{pmatrix} . \quad (2.4.12)$$

Vemos que las soluciones tipo u_1 y u_2 son autovectores del operador de helicidad con valor propio positivo, $+1/2$. Diremos, por tanto, que u_1 y u_2 tienen helicidad positiva. Análogamente, v_2 y v_1 tienen helicidad negativa.

2.4.2. Quiralidad

La quiralidad representa la generalización de la helicidad para partículas sin masas (o ultra-relativistas, para las que se puede menospreciar la masa en frente de la energía). Consideramos de nuevo el operador de helicidad con $\omega^\mu = (0, \mathbf{k})$ y $\mathbf{k}^2 = 1$. El procedimiento que utilizaremos para estudiar los operadores quirales consiste en realizar una transformación de Lorentz, o «boost», a un sistema de referencia donde la partícula se encuentre en movimiento con un momento \mathbf{p} . Por lo tanto, dado que venimos del sistema centro de masas, la velocidad del «boost», \mathbf{v} , es paralela a \mathbf{p} . Además, elegimos \mathbf{k} de forma que sea también paralelo a \mathbf{p} y \mathbf{v} . Según la teoría especial de la relatividad de Einstein, se tienen las siguientes igualdades [4, 5],

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{p}}{E}, \quad \gamma = \frac{E}{m}, \quad (2.4.13)$$

donde γ es el factor de contracción de Lorentz; $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$. Así, pues, con este «boost» las transformaciones de p^μ y ω^μ son de la forma

$$\begin{aligned} \omega^\mu &= (0, \hat{\mathbf{k}}) \longrightarrow \gamma(0 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot 0) = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{E}{m} \hat{\mathbf{p}} \right), \\ p^\mu &= (m, 0) \longrightarrow \gamma(m - \mathbf{v} \cdot 0, 0 - m\mathbf{v}) = (E, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

En el límite de muy altas energías, $E \gg m$, tenemos $p^2 = m^2 \approx 0$, o lo que es lo mismo $E \approx |\mathbf{p}|$. En esta aproximación, el operador de helicidad es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma_5 \not{\omega} &= \frac{1}{2}\gamma_5 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m} \gamma_0 - \frac{E}{m} \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{E}{m} \gamma_5 (\gamma^0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Tomemos un estado, $u(p)$, propio de helicidad, con valor propio positivo,

$$\frac{1}{2}\gamma_5 \not{\omega} u(p) = +\frac{1}{2}u(p). \quad (2.4.16)$$

En la aproximación de altas energías, ec. (2.4.15), esta última relación se simplifica de la forma

$$\frac{1}{2} \frac{E}{m} \gamma_5 (\gamma^0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma}) u(p) = \frac{1}{2} u(p). \quad (2.4.17)$$

Por otra parte, $u(p)$ satisface la ecuación de Dirac, $(\not{p} - m)u(p) = 0$, que ahora nos conviene reescribir de la forma

$$\left(\frac{E}{|\mathbf{p}|} \gamma^0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma} \right) u(p) = \frac{m}{|\mathbf{p}|} u(p), \quad (2.4.18)$$

donde lo que se ha hecho es pasar el término de masas al segundo miembro de la ecuación, y dividir por el módulo del trimomento. En la aproximación de altas energías, esta última ecuación se convierte en

$$(\gamma^0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma}) u(p) = \frac{m}{E} u(p). \quad (2.4.19)$$

Juntando las ecuaciones (2.4.17) y (2.4.19), obtenemos,

$$\frac{1}{2} \frac{E}{m} \gamma_5 (\gamma^0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\gamma}) u(p) = \frac{1}{2} \frac{E}{m} \gamma_5 \frac{m}{E} u(p) = \frac{1}{2} u(p), \quad (2.4.20)$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\gamma_5 u(p) = \frac{1}{2}u(p). \quad (2.4.21)$$

Por lo tanto, en altas energías el operador de quiralidad, $\frac{1}{2}\gamma_5$, provee un buen número cuántico, que de hecho coincide con la helicidad. Este tratamiento siempre es exactamente válido para las partículas sin masa.

De hecho, ahora podemos escoger una nueva base, propia del operador de quiralidad,

$$u_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} u, \quad u_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} u, \quad (2.4.22)$$

donde $(1 \pm \gamma_5)/2$ son los proyectores quirales de derecha, «+», e izquierda, «-». Los valores propios son $\pm 1/2$, respectivamente; a saber,

$$\frac{1}{2}\gamma_5 u_L = -\frac{1}{2}u_L, \quad \frac{1}{2}\gamma_5 u_R = +\frac{1}{2}u_R. \quad (2.4.23)$$

Capítulo 3

Interacción nuclear fuerte. Cromodinámica cuántica

La cromodinámica cuántica es la teoría actualmente aceptada sobre la interacción nuclear fuerte, que es responsable de que los quarks se agrupen para formar los hadrones y los mesones, unos de los componentes más importantes del universo. En este capítulo aplicaremos las técnicas de las teorías de gauge estudiadas en el capítulo anterior al caso de QCD.

En primer lugar, estudiaremos el fenómeno de la libertad asintótica, por el cual la constante de acoplamiento de QCD disminuye a altas energías. Posteriormente, daremos un repaso al sector de quarks ligeros, lo cual nos llevará a considerar la aparición de nuevas simetrías aproximadas. Dichas simetrías, en la realidad, aparecen rotas, por lo que a continuación estudiaremos el teorema de Goldstone, que nos asegura que dicha rotura conlleva la aparición de nuevas partículas sin masa en la teoría: los bosones de Goldstone.

El siguiente paso que daremos es estudiar con todo detalle las propiedades del grupo de simetría de QCD, $SU(3)$. En primer lugar, veremos las tres formas más interesantes de descomponerlo en subgrupos, inspiradas por la simetría quiral que existe en la teoría si no se considera la masa de los quarks ligeros. Seguidamente, realizaremos una caracterización sistemática de las diferentes representaciones del grupo, desarrollando el método de las tablas de Young para representarlas, y calcular de forma simple la descomposición en representaciones irreducibles del producto directo de dos de ellas. Para acabar el capítulo, clasificaremos los diferentes mesones y bariones utilizando las técnicas desarrolladas en la sección anterior.

3.1. Libertad asintótica

Tal y como vimos en la sección 2.3.2, el lagrangiano de QCD es

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_i \bar{q}_i (i\not{D} - m_i) q_i - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a, \quad (3.1.1)$$

donde la derivada covariante venía definida según

$$D_\mu = \partial_\mu + ig(\Lambda) \frac{\tau^a}{\sqrt{2}} A_\mu^a. \quad (3.1.2)$$

En esta ecuación, $g(\Lambda)$ es la constante de acoplamiento, que tal y como sabemos por los cursos de teoría cuántica de campos depende de la escala a la que se renormaliza la teoría, que viene dada precisamente por la *escala de renormalización*, Λ , que se puede incluir como límite de integración —en inglés, «cut-off»—, o mediante la regularización dimensional.

Para estudiar la libertad asintótica de QCD, consideraremos la colisión

$$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}.$$

A bajas energías, tan sólo contribuye el canal t que, a nivel árbol, se puede describir mediante el diagrama de la figura 3.1, donde las etiquetas de las líneas fermiónicas indican momento, helicidad y color, respectivamente. En el sistema centro de masas tenemos, por definición, el momento total —tanto inicial

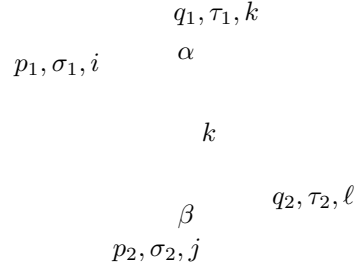


Figura 3.1: Proceso de colisión $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$, en el canal t .

como final— es nulo, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$. Según las reglas de Feynman que vimos en el capítulo anterior, la contribución de este diagrama, $i\mathcal{M}$, es la siguiente

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\mu v(q_2, \tau_2) ig(\Lambda) \left(T^\beta\right)_{jl} \left(-i \frac{g_{\mu\Lambda}}{k^2}\right) \left(T^\beta\right)_{ki} ig(\Lambda) \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma^\Lambda u(p_1, \sigma_1) , \quad (3.1.3)$$

donde $T^a = \lambda^a / \sqrt{2}$, siendo λ^a las matrices de Gell-Mann. Consideraremos el límite no relativista, $|\mathbf{p}| \ll m$. Además, también consideraremos que los estados inicial y final son un singlete de color, ya que es la única forma de preservar la simetría $SU_c(3)$. Con lo cual, podemos contraer los índices de color iniciales y finales entre sí,

$$\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}} i\mathcal{M}_{\text{color}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{N_c}} , \quad (3.1.4)$$

donde N_c es el número de colores (actualmente, creemos con gran certeza que $N_c = 3$), y se introduce en esta última ecuación por conveniencia. El resultado que se obtiene para la parte de color es

$$\frac{1}{N_c} \text{tr} T^a T^a =: C_f . \quad (3.1.5)$$

Según las propiedades de los grupos $SU(N_c)$, se puede demostrar que

$$C_f = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} . \quad (3.1.6)$$

Según la conservación del momento en cada vértice, tenemos que $k = p_1 - q_1$. En el límite de bajas energías, tenemos

$$p_1^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \approx m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} , \quad (3.1.7)$$

$$q_1^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2} \approx m + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} , \quad (3.1.8)$$

de donde obtenemos

$$k^2 = (p^0 - q^0)^2 - \mathbf{k}^2 \approx \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{q}^2}{2m}\right) - \mathbf{k}^2 , \quad (3.1.9)$$

por lo que tenemos $(k^0)^2 \ll \mathbf{k}^2$, ya que k^0 va dividido por la masa. Con lo cual, podemos aproximar el propagador del fotón de la forma

$$\frac{1}{k^2} \approx \frac{1}{-\mathbf{k}^2} . \quad (3.1.10)$$

Por otro lado, tenemos que la parte de spin, en esta aproximación, tan sólo contribuye cuando $\mu = \Lambda = 0$, y su valor es

$$\bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^0 v(q_2, \tau_2) \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma_0 u(p_1, \sigma_1) = [2m(-1)\delta_{\sigma_2\tau_2}] \cdot [2m\delta_{\sigma_1\tau_1}] . \quad (3.1.11)$$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para dar el valor final del elemento de matriz, a nivel árbol,

$$i\mathcal{M} = 4\pi(2m)^2 C_f \frac{\alpha}{\mathbf{k}^2} , \quad (3.1.12)$$

Figura 3.2: Diagramas a un loop para el proceso $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$.

donde $\alpha = g^2(\Lambda)/4\pi$ es la generalización de la constante de estructura fina. Vemos que obtenemos una ley proporcional a la inversa del cuadrado del momento, lo que en espacio de posiciones es equivalente a la ley de Coulomb.

El cálculo a un loop se puede realizar siguiendo pasos similares. En la figura 3.2 se muestran los dos diagramas que contribuyen a primer orden, si el cálculo se hace en el gauge de Coulomb¹. La contribución conjunta de estos dos diagramas, y el de nivel árbol, es

$$i\mathcal{M} = 4\pi(2m)^2 C_f \frac{\alpha}{\mathbf{k}^2} \left\{ 1 - \frac{\beta_0}{2\pi} \alpha \ln \frac{|\mathbf{k}|}{\Lambda} \right\}, \quad (3.1.13)$$

donde $\beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_F n_f$, $C_A = N_c = 3$, $T_F = \frac{1}{2}$ y n_f es el número de fermiones ligeros, que normalmente tomaremos $n_f = 3$ («up, down y strange»), por lo que $\beta_0 = 9$.

La ecuación de *Källan-Symanzik* (KS) nos da la renormalización de α ,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \alpha = \beta(\alpha), \quad (3.1.14)$$

donde

$$\beta(\alpha) = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha^2 + o(\alpha)^3. \quad (3.1.15)$$

La ecuación de KS proviene de exigir que el elemento de matriz sea invariante al cambiar la escala de renormalización,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} i\mathcal{M} = 0. \quad (3.1.16)$$

La ecuación de KS, ec. (3.1.14), se puede resolver imponiendo unas ciertas condiciones iniciales $\alpha(\Lambda')$,

$$\alpha(\Lambda) = \frac{\alpha(\Lambda')}{1 + \frac{\beta_0}{2\pi} \alpha(\Lambda') \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}}. \quad (3.1.17)$$

Dado que α depende de la constante de acoplamiento tan sólo, esta última ecuación nos da la evolución del acoplamiento al variar la escala de renormalización. Dado que la escala de renormalización tiene unidades de energía, se puede considerar que es del orden de $\Lambda \sim \mathbf{k}^2$. La evolución de la constante de acoplamiento de QCD se muestra en la figura 3.3.

Como vemos en la figura 3.3, la constante de acoplamiento disminuye a altas energías, por lo que en estas escalas la interacción nuclear fuerte disminuye de intensidad. Este fenómeno se conoce con el nombre de *libertad asintótica*.

Ejercicio 3.1.1 Para hacernos una idea de los ordenes de magnitud involucrados, realizaremos el siguiente ejercicio numérico. Supongamos que a la escala de la masa de la partícula Z la constante de acoplamiento es $\alpha(\Lambda = M_Z) = 0,118$. ¿A que escala, Λ' , tendremos $\alpha(\Lambda') = 1/2$.

¹En el gauge de Feynman es necesario calcular otros diagramas, que incluyen loops de fantasmas.

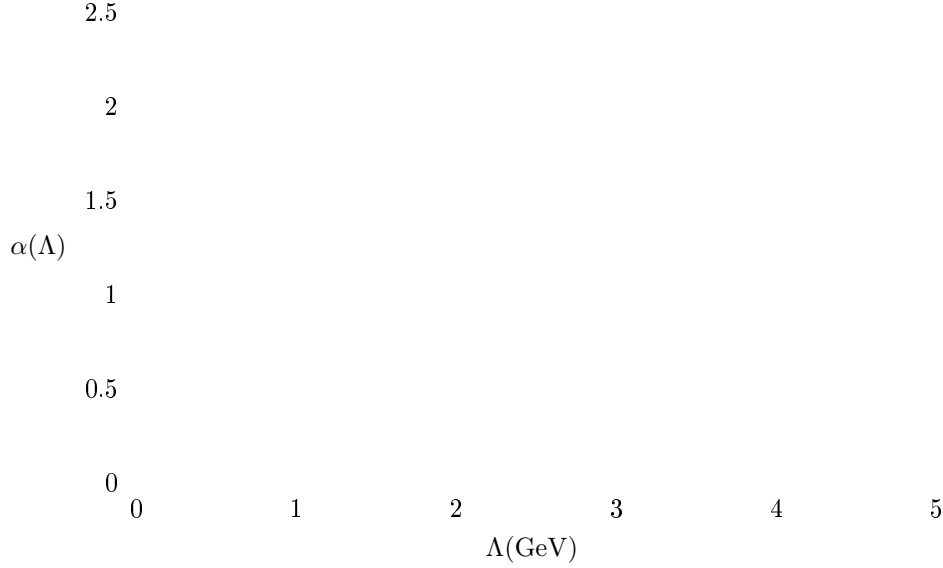


Figura 3.3: Evolución de la constante de acoplamiento, en función de la escala de renormalización, en el caso de QCD.

Solución Tomaremos $\beta = 9$. Lo que debemos hacer es aislar Λ' de la ecuación (3.1.17),

$$\Lambda' = \Lambda \exp \left\{ -\frac{2\pi}{\alpha(\Lambda')\beta_0} \left(\frac{\alpha(\Lambda')}{\alpha(\Lambda)} - 1 \right) \right\} . \quad (3.1.18)$$

En el primer capítulo vimos que $\Lambda = M_z = 91\text{GeV}$. Substituyendo los valores numéricos, obtenemos

$$\Lambda' = 91\text{GeV} \exp \left\{ -\frac{2\pi}{0,5 \cdot 9} \left(\frac{0,5}{0,118} - 1 \right) \right\} = 0,991\text{GeV} , \quad (3.1.19)$$

es decir, $\alpha \approx 1\text{GeV}$.

Por último, tenemos algunos objetos que son invariantes bajo el grupo de renormalización. En el orden más bajo,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \Lambda_{\text{MS}} = 0 , \quad (3.1.20)$$

donde

$$\Lambda_{\text{MS}} = \Lambda e^{-\frac{\pi}{\beta_0 \alpha_{\text{MS}}(\Lambda)}} . \quad (3.1.21)$$

Hay una escala, $\Lambda_{\text{MS}} (\sim 400\text{MeV})$ por debajo de la cual la teoría de perturbaciones no es útil, ya que entramos en el régimen de acoplamiento muy fuerte. Esta es la escala que nos permite comparar las masas de los quarks para decir si son pequeñas o grandes. Esta comparación nos permite clasificar los seis quarks en dos grupos: los quarks ligeros, «up, down y strange», todos ellos con una masa menor que Λ_{MS} ; y los quarks pesados: «charm, top y bottom».

Por otra parte, el hecho de que la constante de acoplamiento decrezca fuertemente en bajas energías, como se ve en la figura 3.3, tiene una consecuencia importante en nuestro mundo: los quarks no se pueden obtener como estados asintóticos, es decir, no se pueden observar aislados, tan sólo los podemos encontrar integrando algún tipo de hadrón. Una forma de ver esto es considerar que, cuando se intentan separar dos quarks, y dado que el acoplamiento entre ellos es tan fuerte, se gasta tanta energía que se pueden crear dos nuevos quarks, que quedan emparejados con los dos antiguos. De esta forma, siempre observaremos mesones y bariones, pero nunca estados libres de quarks asintóticos.

3.2. Sector de los tres quarks ligeros

Tal i como vimos en la sección 2.3.2, el lagrangiano de QCD se puede escribir de la forma

$$\mathcal{L} = \sum_i \bar{q}_i (i \not{D} - m_i) q_i - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a . \quad (3.2.1)$$

La escala típica de confinamiento es $\Lambda_{M_s} \approx 400\text{MeV}$, que es mucho mayor que la masa de los tres quarks más ligeros. Por tanto, a bajas energías, tan sólo nos es necesario tener en cuenta estos tres quarks, y además, podemos menospreciar su masa. Con estas aproximaciones, el lagrangiano se escribe de la forma

$$\mathcal{L} = \sum_{u,d,s} \bar{q} i \not{D} q - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a . \quad (3.2.2)$$

En esta aproximación, aparece una nueva simetría global, que se corresponde al intercambio de los tres quarks. Para estudiar más a fondo esta simetría, nos conviene separar las funciones de onda de los quarks en sus partes quirales, ec. (2.4.22),

$$\bar{q} i \not{D} q = \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R , \quad (3.2.3)$$

donde

$$\bar{q}_R = q_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_0 = q^\dagger \gamma_0 \frac{1-\gamma_5}{2} = \bar{q} \frac{1-\gamma_5}{2} , \quad (3.2.4)$$

$$\bar{q}_L = q_L^\dagger \gamma_0 = q^\dagger \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_0 = q^\dagger \gamma_0 \frac{1+\gamma_5}{2} = \bar{q} \frac{1+\gamma_5}{2} , \quad (3.2.5)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R &= \bar{q} \frac{1+\gamma_5}{2} i \gamma^\mu D_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} q + \bar{q} \frac{1-\gamma_5}{2} i \gamma^\mu D_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} q \\ &= \bar{q} \gamma^\mu D_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{1+\gamma_5}{2} \right) q \\ &= \bar{q} \not{D} q , \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

donde, en el último paso, hemos utilizado $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$. Por lo tanto, vemos que el lagrangiano, de forma independiente, tiene simetrías en el intercambio de las partes derecha y izquierda. Dado que consideramos tan sólo los tres quarks ligeros que cumplan, esta simetría obedecerá el grupo no abeliano $SU(3)$. Es decir, tenemos las simetrías $SU_R(3)$ (parte derecha) y $SU_L(3)$ (parte izquierda).

Debemos observar que para poder separar la simetría en sus partes quirales, ha sido de gran importancia poder despreciar el término de masas, ya que éste no posee dicha simetría, ya que

$$\bar{q} q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L . \quad (3.2.7)$$

Esta relación se demuestra haciendo un cálculo del mismo estilo del que hemos utilizado anteriormente para el término cinético,

$$\begin{aligned} \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L &= \bar{q} \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) q \\ &= \bar{q} q . \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En el caso de que no podamos realizar la aproximación sin masa, la simetría quiral se romperá. En algunas ocasiones, no podemos despreciar la masa de los quarks ligeros, pero sí podemos hacer la aproximación de que son iguales, $m = m_u = m_d \approx m_s$, y en este caso tenemos tan sólo la simetría de intercambiar los quarks entre sí (ambas partes), por lo que el grupo de transformación será $SU_{L+R}(3)$.

Debe notarse que estas simetrías, pese a venir descritas por el mismo grupo, $SU(3)$, son esencialmente diferentes a la simetría de color que nos llevó en el capítulo anterior a escribir el lagrangiano de QCD. Estas nuevas simetrías actúan sobre el espacio de sabor, mientras que la anterior actúa sobre el espacio de color, y para distinguirla acostumbramos a escribir $SU_c(3)$.

De momento nos centraremos en la aproximación de quarks sin masa, cuya simetría de sabor es, como ya hemos recalado, $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$. Consideramos las siguientes transformaciones infinitesimales, independientes para las partes derecha e izquierda,

$$\begin{aligned} \delta \psi_L &= i \varepsilon_L^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \psi_L \longrightarrow \psi_L \mapsto e^{i \varepsilon_L^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}} \psi_L , \\ \delta \psi_R &= i \varepsilon_R^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \psi_R \longrightarrow \psi_R \mapsto e^{i \varepsilon_R^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}} \psi_R , \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde λ^a son las matrices de Gell-Mann, que ahora actúan sobre el espacio de sabor. Los factores ε_L^a y ε_R^a son los parámetros de la simetría, y se pueden combinar para formar la componente vectorial, ε^a , y axial, ε_5^a ,

$$\varepsilon^a = \frac{1}{2}(\varepsilon_L^a + \varepsilon_R^a), \quad \varepsilon_5^a = \frac{1}{2}(\varepsilon_L^a - \varepsilon_R^a). \quad (3.2.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad (3.2.11)$$

la variación total de $\psi = \psi_L + \psi_R$ se puede escribir de la forma

$$\delta\psi = i(\varepsilon^a - \varepsilon_5^a) \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \psi_R + i(\varepsilon^a + \varepsilon_5^a) \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \psi_L, \quad (3.2.12)$$

o bien,

$$\delta\psi = i(\varepsilon^a - \gamma_5 \varepsilon_5^a) \frac{\lambda^a}{2} \psi \longrightarrow \psi \mapsto e^{i(\varepsilon^a - \gamma_5 \varepsilon_5^a) \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}} \psi. \quad (3.2.13)$$

Por tanto, tenemos una nueva simetría del lagrangiano, $SU(3)_V \otimes SU(3)_A$. No obstante, esta simetría no es equivalente a $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, ya que en esta última los generadores de las partes derecha e izquierda no se mezclan,

$$[L, L] \propto L, \quad [R, R] \propto R, \quad [L, R] = 0, \quad (3.2.14)$$

mientras que los de la simetría axial–vectorial si,

$$[V, V] \propto V, \quad [A, A] \neq A. \quad (3.2.15)$$

Como ya hemos dicho, en el caso de que consideráramos las masas de los quarks ligeros iguales, pero no nula, tan sólo tendríamos la simetría vectorial, $SU(3)_v$, cuya la transformación infinitesimal será de la forma

$$\delta\psi = i \frac{1}{2}(\varepsilon_L^a + \varepsilon_R^a) \frac{\lambda^a}{2} \psi. \quad (3.2.16)$$

3.3. Realización de la simetría

En general, cuando tenemos un lagrangiano con una determinada simetría, generada por un operador Q , existe la posibilidad de que el estado fundamental, el vacío $|0\rangle$, respete la simetría o no.

Realización de Wigner-Weyl El vacío respeta la simetría,

$$Q|0\rangle = 0. \quad (3.3.1)$$

El ejemplo paradigmático de potencial que respeta la simetría se muestra en la figura 3.4(a).

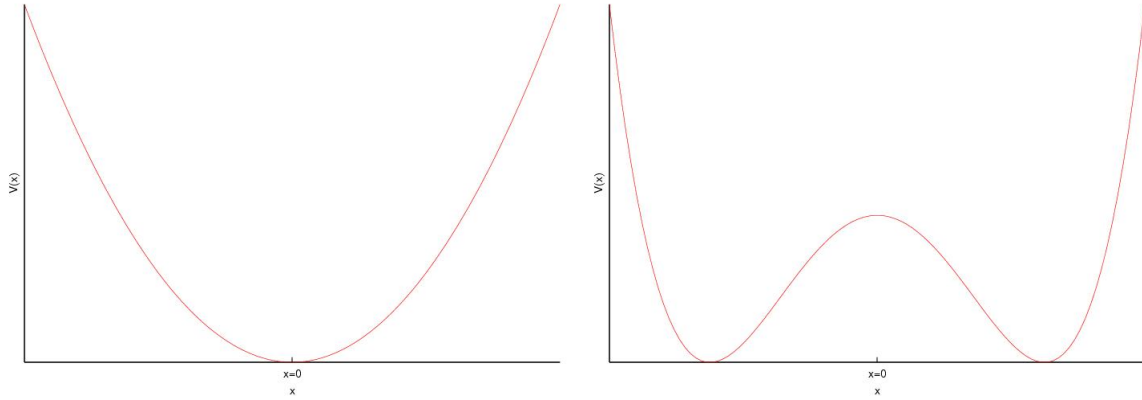
Realización de Nambú-Goldstone El vacío de la teoría no respeta la simetría del lagrangiano,

$$Q|0\rangle \neq 0. \quad (3.3.2)$$

En la figura 3.4(b) se muestra el ejemplo típico de potencial que rompe la simetría mediante la realización de Nambú-Goldstone.

El caso más interesante físicamente es la realización de Nambú-Goldstone, ya que entonces el *teorema de Goldstone* nos asegura que aparecen unas nuevas partículas, sin masa ni spin, llamadas *bosones de Goldstone*.

Teorema 3.3.1 (de Goldstone) *Dada una simetría que se realiza físicamente por la realización de Nambú-Goldstone, cuya carga de Noether, Q , no depende del tiempo. Entonces, aparecen bosones de Goldstone, sin masa.*



(a) El estado fundamental de este potencial, que se sitúa justo en el mínimo absoluto, tiene la misma simetría de paridad que el potencial en su conjunto.

(b) Este potencial tiene dos mínimos absolutos, a los alrededores de los cuales no existe la misma simetría de paridad que posee el potencial en su conjunto.

Figura 3.4: Posibles modos de realizar una simetría en el vacío (estado fundamental).

Demostración Sea Q el generador (carga conservada) de una simetría realizada según Nambu-Goldstone, $Q|0\rangle \neq 0$, y un operador A , ambos independientes del tiempo, $\dot{Q} = \dot{A} = 0$. Y sea δa el valor esperado del conmutador de ambos,

$$\delta a = \langle 0 | [Q, A] | 0 \rangle . \quad (3.3.3)$$

Entonces, se cumple

$$\delta a = \sum_n \int d^3x (\langle 0 | j_0(x) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle - \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(x) | 0 \rangle) , \quad (3.3.4)$$

donde $j_\mu(x)$ es la corriente conservada de Noether asociada a la simetría generada por Q ,

$$Q = \int d^3x j_0(x) . \quad (3.3.5)$$

Los elementos de matriz de $j_0(x)$ se pueden calcular de acuerdo con

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_0(x) | n \rangle &= \langle 0 | e^{ip \cdot x} j_0(0) e^{-ip \cdot x} | n \rangle \\ &= \langle 0 | j_0(0) | n \rangle e^{-ip_n \cdot x} , \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

con lo cual, podemos escribir δa de la forma

$$\begin{aligned} \delta a &= \sum_n \int d^3x (\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-ip_n \cdot x} - \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{ip_n \cdot x}) \\ &= \sum_n (\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \langle 0 | A | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t}) \delta(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

La delta de \mathbf{p} nos fuerza que el momento sea nulo, es decir, nos lleva al sistema centro de masas, por lo que $E_n = m_n$. Por otra parte, debido a que tanto A como Q son independientes del tiempo, por hipótesis, su derivada respecto del tiempo debe ser nula,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a &= 0 \\ &= (-i) \sum_n m_n (\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | A | 0 \rangle e^{-im_n t} + h.c.) . \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Por lo tanto, para cada estado tal que $\langle n | j_0(0) | 0 \rangle \neq 0$, necesariamente tenemos $m_n = 0$. Necesariamente existe al menos uno de estos estados, ya que $Q|0\rangle \neq 0$. Esto completa la demostración del teorema.

En nuestro caso, $m \rightarrow 0$, tenemos la simetría axial. Vamos a comprobar que se realiza según Nambú-Goldstone. La carga conservada,

$$Q_A^a = \int d^3x j_A^0(x) , \quad (3.3.9)$$

debe conmutar con el hamiltoniano, en este límite. Esto significa (ver, por ejemplo, [6]) que dado un estado propio del hamiltoniano, $|E\rangle$ (y, por tanto, con energía definida), existe otro estado, también propio del hamiltoniano y con la misma energía, que viene dado por $Q_A^a |E\rangle$. Sin embargo, ambos estados tienen diferente paridad, dado que

$$\mathcal{P} Q_A^a \mathcal{P} = -Q_A^a , \quad (3.3.10)$$

donde \mathcal{P} es el operador de paridad, y se ha tenido en cuenta que $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$. En la naturaleza, no observamos estados de la misma energía (y por lo tanto, masa), pero con distinta paridad. Por lo tanto, esta simetría debe romperse según la realización de Nambú-Goldstone.

Debido a que la masa de los quarks no es realmente nula, la simetría $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ se rompe espontáneamente a $SU_{L+R}(3)$, o $SU_v(3)$. Dado que tenemos ocho generadores, aparecen ocho bosones de Goldstone, que son los piones (π^+ , π^0 y π^-), los kaones (K^+ , K^0 , \bar{K}^0 y K^-) y la partícula η .

3.4. Grupo $SU(3)$

3.4.1. Subgrupos: hipercarga, isospin, V-spin y U-spin

El grupo $SU_v(3)$, también llamado $SU_Y(3)$ (donde Y es la hipercarga), es una simetría del sector de quarks ligeros del lagrangiano de QCD, si consideramos que estos tienen la misma masa. Consideramos la siguiente base para nuestro espacio de Hilbert,

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (3.4.1)$$

Los estados correspondientes a los antiquarks, las antipartículas asociadas a los quarks, se construyen cambiando el signo de los estados de los quarks respectivos.

El grupo $SU_v(3)$ se puede descomponer en subgrupos de diferentes formas. A continuación vamos a presentar tres de ellas, en que la descomposición se puede entender como considerar las masas de dos de los quarks iguales, más un factor de $U(1)$ extra².

En la primera descomposición, llamada *isospin*, consideramos iguales las masas de los quarks «up» y «down», lo que equivale a suponer el subgrupo $SU_I(2) \otimes U_Y(1) \subset SU_v(3)$. Los operadores de isospin, I_3 , y hipercarga, Y , y carga electromagnética, Q ; se definen a partir de las matrices de Gell-Mann,

$$I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.4.2)$$

$$Y = \frac{2}{2\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad (3.4.3)$$

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y . \quad (3.4.4)$$

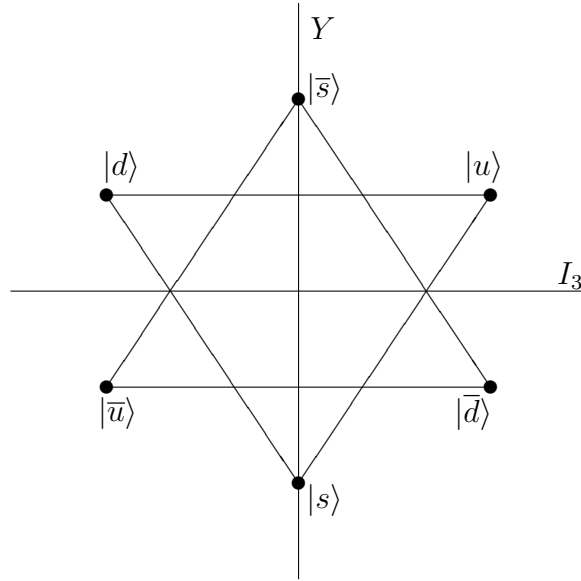
En algunas ocasiones, la ecuación (3.4.4) se toma como definición de hipercarga, a partir de la carga eléctrica y el isospin. Los números cuánticos de los quarks ligeros se muestran en la siguiente tabla.

	I_3	Y	Q
u	1/2	1/3	2/3
d	-1/2	1/3	-1/3
s	0	-2/3	-1/3

(3.4.5)

Las posiciones de los quarks (i antiquarks) en el plano I_3 - Y se muestran en la figura 3.5. Como podemos

²Este es el motivo por el cual consideramos tres formas de separar el grupo $SU(3)$, ya que con tres quarks podemos formar tres parejas diferentes.

Figura 3.5: Posición de los quarks (i antiquarks) en el plano I_3 - Y .

ver, los antiquarks se sitúan en los vértices de un triángulo diametralmente opuesto al de los quarks. La simetría de isospin es la más aproximada de todas las que vamos a tratar aquí, dado que, realmente, la masa de los quarks u y d son muy parecidas.

La segunda de las opciones considerar las masas de los quarks «up» y «strange» iguales, es decir, considerar el grupo $SU_v(2) \otimes U_{Y-Q}(1) \subset SU_v(3)$. Esta elección define el V-spin, cuyas tres componentes son

$$V_1 = T^4, \quad V_2 = T^5, \quad V_3 = \frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8, \quad (3.4.6)$$

donde ahora usamos la normalización $T^a = \lambda^a/2$. Esta aproximación no es tan exacta como la anterior y, por lo tanto, no la consideraremos más en el futuro.

La última posibilidad es considerar iguales las masas de los quarks «down» y «strange», lo que se llama U-spin, y está asociado al subgrupo $SU_U(2) \otimes U_Q(1)$. Los generadores son

$$U_1 = T_6, \quad U_2 = T_1, \quad U_3 = -\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8. \quad (3.4.7)$$

Como antes, esta simetría no es muy buena y, por lo tanto, no la consideraremos de nuevo en el futuro.

3.4.2. Representaciones de $SU(3)$

Caracterización de las representaciones

En el caso más sencillo de $SU(2)$, donde tan sólo tenemos un operador que conmuta con todos los generadores, *operador de Casimir*, que es J^2 , los estados pueden etiquetarse como $|J, J_z\rangle$. En el caso de $SU(3)$, tenemos dos operadores de Casimir, y los estados se etiquetan tal que así

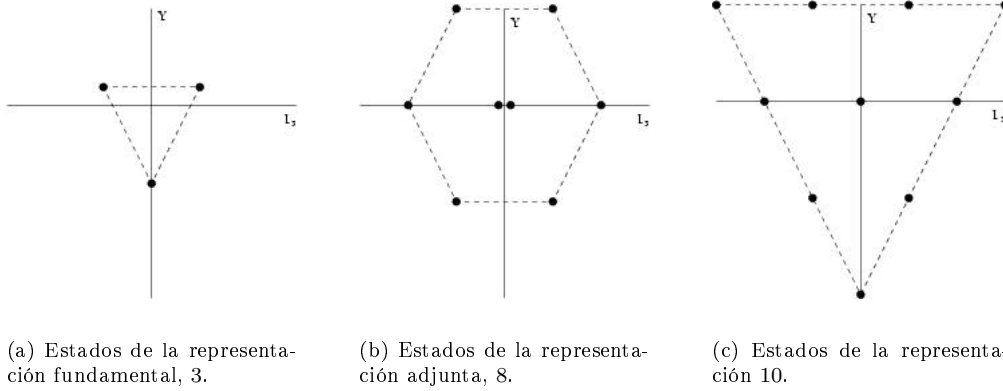
$$|(p, q); I^2, I_3, Y\rangle, \quad (3.4.8)$$

donde p y q caracterizan la representación (irreducible) que estamos usando, I^2 y I_z son los operadores de isospin, que corresponden al subgrupo $SU_I(2)$ y Y es la hipercarga. La dimensionalidad de la representación (p, q) viene dada por

$$D(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+1). \quad (3.4.9)$$

En el cuadro 3.1 se enumeran algunas de las representaciones más importantes, junto con algunas de sus propiedades más interesantes.

(p, q)	$D(p, q)$	Nombre	Observaciones
$(0, 0) \longrightarrow$	1	1 (trivial o escalar)	Invariante bajo $SU(3)$
$(1, 0) \longrightarrow$	3	3 (fundamental)	Contiene los quarks (u, d y s)
$(0, 1) \longrightarrow$	3	$\bar{3}$ (antifundamental)	Contiene los antiquarks (\bar{u}, \bar{d} y \bar{s})
$(2, 0) \longrightarrow$	6	6	
$(0, 2) \longrightarrow$	6	$\bar{6}$	
$(1, 1) \longrightarrow$	8	8 (adjunta)	Es real
$(3, 0) \longrightarrow$	10	10	
$(0, 3) \longrightarrow$	10	$\bar{10}$	
$(2, 1) \longrightarrow$	15	15	
$(1, 2) \longrightarrow$	15	$\bar{15}$	

Cuadro 3.1: Representaciones más importantes del grupo $SU(3)$.Figura 3.6: Estados de las principales representaciones del grupo $SU(3)$.

Teorema de Okubo

Ahora, dada una de las representaciones anteriores, deseamos saber su contenido, es decir, el isospin, hipercarga, etc. de las partículas que contiene. Para ello, nos será de interés el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 (de Okubo) *Dada una representación (p, q) , existen dos números reales $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$, tales que*

$$p + q \geq \lambda \geq q \geq \mu \geq 0, \quad (3.4.10)$$

i, además,

$$I = \frac{1}{2}(\lambda - \mu), \quad (3.4.11)$$

$$Y = \lambda + \mu - \frac{1}{3}(2p + 4q). \quad (3.4.12)$$

Contenido de las principales representaciones

A continuación, aplicaremos el teorema de Okubo a las representaciones más importantes físicamente del grupo $SU(3)$, con el objetivo de caracterizar completamente su contenido.

En primer lugar, consideramos la representación $\langle 3 \rangle = (1, 0)$. Según el teorema de Okubo, se debe cumplir

$$1 \geq \lambda \geq 0 \geq \mu \geq 0, \quad (3.4.13)$$

con lo cual, obligatoriamente $\mu = 0$. Para λ tenemos dos posibilidades,

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\longrightarrow T = \frac{1}{2}, & Y = \frac{1}{3}, & \text{(doblete de isospin)} \\ \lambda = 0 &\longrightarrow T = 0, & Y = -\frac{2}{3}, & \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

es decir,

$$\langle 3 \rangle = \left(0, -\frac{2}{3}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right). \quad (3.4.15)$$

La representación con $I = \frac{1}{2}$ tiene dos estados, correspondientes a $I_3 = +\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, con lo cual tenemos un total de tres estados, como esperábamos. Estos tres estados se muestran, en el plano $Y-I_3$ en la figura 3.6(a).

El segundo ejemplo que consideraremos es la representación adjunta, $\langle 8 \rangle = (1, 1)$. Según el teorema de Okubo, se debe cumplir

$$2 \geq \lambda \geq 1 \geq \mu \geq 0, \quad (3.4.16)$$

con lo cual tenemos cuatro posibilidades,

$$\begin{aligned} \lambda = 2, \quad \mu = 1 &\longrightarrow T = \frac{1}{2}, \quad Y = 1, \\ \lambda = 2, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = 1, \quad Y = 0, \\ \lambda = 1, \quad \mu = 1 &\longrightarrow T = 0, \quad Y = 0, \\ \lambda = 1, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = \frac{1}{2}, \quad Y = -1. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Por lo tanto, la representación adjunta se puede descomponer en la suma directa de cuatro representaciones de isospin-hipercarga,

$$\langle 8 \rangle = (1, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, -1\right) \oplus (0, 0). \quad (3.4.18)$$

En las representaciones del tipo $I = 1$ tenemos un total de tres estados, correspondientes a $I_3 = +1, 0$ y -1 . De la misma forma, en las representaciones del tipo $I = \frac{1}{2}$, tenemos dos estados, al igual que antes. De esta manera, tenemos un total de ocho estados, que se muestran en el plano $Y-I_3$ en la figura 3.6(b). Debe notarse que en el origen tenemos dos estados diferentes, uno perteneciente al triplete de isospin de $(1, 0)$, y otro del singlete de isospin, $(0, 0)$. En el dibujo se muestran separados por claridad.

Consideraremos, por último, la representación $\langle 10 \rangle = (3, 0)$. Según el teorema de Okubo, tenemos,

$$3 \geq \lambda \geq 0 \geq \mu \geq 0, \quad (3.4.19)$$

con lo cual tenemos $\mu = 0$, y cuatro valores posibles para λ ,

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = 0, \quad Y = -2, \\ \lambda = 1, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = \frac{1}{2}, \quad Y = -1, \\ \lambda = 2, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = 1, \quad Y = 0, \\ \lambda = 3, \quad \mu = 0 &\longrightarrow T = \frac{3}{2}, \quad Y = 1. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Y, por lo tanto, la descomposición de esta representación es

$$\langle 10 \rangle = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \otimes (1, 0) \otimes \left(\frac{1}{2}, -1\right) \otimes (0, -2). \quad (3.4.21)$$

Los 10 estados se muestran en la figura 3.6(c).

3.4.3. Producto tensorial de representaciones. Tablas de Young

Tablas de Young en $SU(2)$

Las tablas de Young proporcionan una receta útil para conocer como se puede descomponer un producto de representaciones dado en suma directa de otras representaciones. Se pueden aplicar a todos los grupos $SU(N)$. Para comenzar a familiarizarnos con su utilización, los aplicaremos a el caso más sencillo: el grupo $SU(2)$.

En el caso de $SU(2)$, el producto de dos representaciones J_1 y J_2 cumple [6]

$$J_1 \otimes J_2 = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} J, \quad (3.4.22)$$

así, a modo de ejemplo, tenemos

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1, \quad \frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad 1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad \dots \quad (3.4.23)$$

La base del espacio de Hilbert esta formada por dos estados: $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. En el formalismo de las tablas de Young, los representamos de la siguiente guisa,

$$|\uparrow\rangle = \boxed{1}, \quad |\downarrow\rangle = \boxed{2}. \quad (3.4.24)$$

En los sistemas donde hay más de un fermión, añadiremos una tabla por cada partícula. Tenemos dos posibilidades:

Tabla simétrica Los dos electrones se han situado en un estado con spin $s = 1$. Lo representamos poniendo las dos tablas en horizontal,

$$\boxed{}\boxed{}, \quad (s = 1). \quad (3.4.25)$$

Tabla antisimétrica Los electrones se sitúan en un estado sin spin, $s = 1$. Lo representamos mediante dos tablas en vertical,

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \quad (s = 1). \quad (3.4.26)$$

Dado las simetrías de las tablas, tenemos las siguientes relaciones,

$$\boxed{1}\boxed{2} = \boxed{2}\boxed{1}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.27)$$

Además, en las tablas verticales no se puede repetir ninguna cifra, dado que son antisimétricas. Para evitar ambigüedades, introducimos las siguientes reglas.

1a regla Requerimos que el número (etiqueta) no disminuya de izquierda a derecha.

2a regla Requerimos que el número (etiqueta) se incremente de arriba a abajo.

3a regla En el grupo $SU(N)$, tan sólo podemos tener hasta N cajas verticalmente.

A modo de ejemplo, consideramos un sistema de tres electrones. Tenemos un total de seis posibilidades; cuatro de ellas corresponden a estados totalmente simétricos y con spin $3/2$,

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}, \quad \boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}, \quad \boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}, \quad \boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}, \quad (3.4.28)$$

y dos de ellos a estados con simetría mixta y spin $1/2$,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.29)$$

Así, pues, los ejemplos de la ecuación (3.4.23) se pueden representar de la forma

$$\boxed{} \otimes \boxed{} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \oplus \boxed{}\boxed{}, \quad (3.4.30)$$

$$\boxed{} \otimes \boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad (3.4.31)$$

$$\boxed{}\boxed{} \otimes \boxed{}\boxed{} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \oplus \boxed{}\boxed{} \oplus \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}. \quad (3.4.32)$$

En este caso, la tabla vertical representa el estado singlete, que es invariante bajo las transformaciones del grupo $SU(2)$ y, por lo tanto, factoriza. En consecuencia, no necesitamos incluirlo en nuestras tablas de Young,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \boxed{}. \quad (3.4.33)$$

Tablas de Young en $SU(3)$

Las técnicas descritas en la subsección anterior se pueden generalizar, sin mayor problema, al grupo $SU(3)$. Mediante las técnicas de las tablas de Young podemos averiguar en que representaciones irreducibles se pueden descomponer el producto directo de dos representaciones. El cambio de base explícito, al igual que en el caso de $SU(2)$, contiene los coeficientes de Clebsh-Gordan [9]. En este caso, las etiquetas de las cajas pueden tomar tres valores,

$$\boxed{1}, \quad \boxed{2}, \quad \boxed{3}, \quad (3.4.34)$$

que representan los tres quarks ligeros que estamos considerando. Por lo tanto, podemos simbolizar la representación fundamental, 3, mediante una caja, $\boxed{}$.

En este caso, tendremos tres tipos de tablas antisimétricas formadas por dos cajas,

$$\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad (3.4.35)$$

que simbolizan los antiquarks correspondientes. Por lo tanto, $\begin{array}{|c|} \hline \boxed{} \\ \hline \boxed{} \\ \hline \end{array}$ simboliza la representación antifundamental, $\bar{3}$. Naturalmente, tan sólo tenemos una posibilidad para formar una tabla totalmente antisimétrica de tres cajas,

$$\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array} =: \bullet, \quad (3.4.36)$$

que representa al estado singlete, que es invariante, y por lo tanto siempre extraído de nuestras tablas de Young.

Pasemos ahora a las tablas simétricas. Tenemos seis tipos de tablas simétricas de dos cajas,

$$\boxed{1} \boxed{1}, \quad \boxed{1} \boxed{2}, \quad \boxed{1} \boxed{3}, \quad \boxed{2} \boxed{2}, \quad \boxed{2} \boxed{3}, \quad \boxed{3} \boxed{3}, \quad (3.4.37)$$

y, por lo tanto, la tabla genérica $\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{} & \boxed{} \\ \hline \end{array}$ simboliza la representación 6 del $SU(3)$. Para las tablas simétricas de tres cajas tenemos un total de diez posibilidades, a saber

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad (3.4.38)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \hline \end{array},$$

que conforman la representación 10, que en el formalismo de las tablas de Young se simboliza mediante $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \hline \end{array}$.

En el caso de $SU(3)$, también resulta de interés considerar las tablas con simetría mezclada,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline \boxed{3} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{2} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{2} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{3} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{2} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{3} & \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.39)$$

Estas ocho posibilidades, simbolizadas por $\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{} & \boxed{} \\ \hline \boxed{} & \\ \hline \end{array}$, nos conducen, pues, a la representación adjunta.

La tabla de Young más general se forma mediante n factores de tres cajas en vertical (que, como hemos dicho, pueden eliminarse), q de dos y p de una, donde estos p y q son los mismos que habíamos introducido con anterioridad para caracterizar la representación utilizada. Así, pues, la tabla de Young más general es de la forma

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline n & q & p \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \dots \\ \hline q & p \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.40)$$

La dimensionalidad de la representación del grupo definida por esta tabla se puede calcular a partir solamente de p y q , y su valor es el dado por la ecuación (3.4.9),

$$D(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \quad (3.4.41)$$

En el cuadro 3.2 se muestran las tablas de Young que se utilizan para indicar las diferentes representa-

Representación	p	q	$D(p, q)$	Tabla de Young
1	0	0	1	•
3	1	0	3	
$\bar{3}$	0	1	3	
6	2	0	6	
$\bar{6}$	0	2	6	
8	1	1	8	
10	3	0	10	
$\bar{10}$	0	3	10	
15	2	1	15	
$\bar{15}$	1	2	15	
24	3	1	24	
$\bar{24}$	1	3	24	
27	2	2	27	
35	4	1	35	
$\bar{35}$	1	4	35	

Cuadro 3.2: Tablas de Young y representaciones del grupo $SU(3)$.

ciones.

A continuación vamos a dar las reglas que se deben seguir para poder hallar de forma sistemática la descomposición del producto tensorial de dos representaciones cuales quiera, a partir simplemente de su simbolización mediante tablas de Young. Para hacerlo de forma más visual y didáctica, veremos de forma detallada un ejemplo concreto, el producto de dos octetes,

$$8 \otimes 8 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.42)$$

Este ejemplo es de interés dado que representa el estado ligado de dos mesones o bariones (del octeto de bariones). El procedimiento se realiza en cinco pasos.

1. En una de las dos tablas de Young, generalmente la segunda, escribimos etiquetas a en todas las cajas del primer piso (primera fila), y b en las del segundo. Dado que siempre eliminamos los factores singlete, no es posible tener ninguna caja en la tercera fila de nuestras tablas de Young, con lo cual no nos son necesarias más etiquetas.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.43)$$

2. Añadir a la primera tabla (o, en su defecto, a la tabla donde no se hayan colocado las etiquetas) todos los cuadros marcados con a correspondientes a la otra tabla de todas las formas posibles (dado que en horizontal las tablas son simétricas, podemos limitarnos a ponerlas siempre al final), pero nunca de forma que hayan dos a en una misma columna (dada la antisimetría de las columnas, y siempre al final de una columna).

Si la tabla tiene menos de tres filas, puede empezarse una nueva fila, siempre y cuando no se superen la tres (y la nueva caja sea siempre la última de su columna correspondiente). Tras realizar este procedimiento en el ejemplo que estamos considerando obtenemos las cuatro siguientes tablas,

$$(i) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad (ii) \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & \\ \hline \end{array}, \quad (iii) \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}, \quad (iv) \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \\ \hline \square & a & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.44)$$

3. En las tablas resultantes, añadir las tablas marcadas con una b de todas las formas posibles, siguiendo los mismos criterios que en el punto anterior; es decir, siempre al final de una fila o columna, procurando que no se repita la misma etiqueta en una misma columna, aunque no importa si se repite en una misma fila. De nuevo, se pueden abrir nuevas filas en las tablas, pero siempre hasta un máximo total de tres filas. El resultado, en nuestro ejemplo, es

$$\begin{aligned} (i) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a & b \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & b & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array}, \\ (ii) & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & b \\ \hline \square & a & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array}, \\ (iii) & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & b \\ \hline \square & & & \\ \hline a & & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & b & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}, \\ (iv) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & b \\ \hline \square & a & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \\ \hline \square & a & \\ \hline a & b & \\ \hline \end{array}. \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

4. En los pasos anteriores hemos obtenido demasiadas tablas, y algunas de ellas deben ser eliminadas. Una receta sencilla para discriminar las que son correctas y las que no es la siguiente: se empiezan a contar las etiquetas de derecha a izquierda, y de arriba a abajo. Si en algún momento, la cuenta de etiquetas b es mayor que la cuenta de etiquetas a , el diagrama queda prohibido y se debe eliminar.

En la práctica, a menudo este paso se realiza a la vez que el anterior; directamente se omiten aquellos diagramas que quedarían prohibidos por esta regla, en vez de dibujar todas las tablas posibles *a priori*. En nuestro ejemplo, deben ser eliminados todos los primeros diagramas de cada fila, con lo cual nos quedan los siguientes diagramas

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & b & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array}, \\
 (ii) \quad & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array}, \\
 (iii) \quad & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & b & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}, \\
 (iv) \quad & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

5. Ya tenemos todas las tablas de Young que contribuyen a la descomposición. El último paso, para acabar de simplificar la notación, consiste en eliminar todos los factores singlete, es decir, todas las columnas de tres cajas (si toda la tabla está formada por factores singlete, toda la tabla se representa por un simple punto, \bullet). Este paso es un reflejo del hecho de que los factores de singlete son invariantes bajo la acción del grupo $SU(3)$ y, por tanto, no afectan en nada a la composición de la representación. En el caso $SU(N)$, el singlete vendría representado por una columna con N cajas.

En nuestro ejemplo del producto de dos representaciones adjuntas, cuatro de las tablas contienen un singlete; una de las cuales (la última, precisamente) está compuesto tan sólo por el producto de dos singletes, por lo que podemos representar toda la tabla simplemente por el estado singlete. En consecuencia, el resultado después de aplicar esta regla a las tablas que tenemos del punto anterior es el siguiente

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & b & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & a \\ \hline \end{array}, \\
 (ii) \quad & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline a & \\ \hline \end{array}, \\
 (iii) \quad & \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}, \\
 (iv) \quad & \bullet.
 \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \bullet \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}, \tag{3.4.48}$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27,$$

Para afianzar este procedimiento, vamos a proceder a resolver unos cuantos ejercicios simples a modo de ejemplo. Especial interés tiene el ejercicio 3.4.3, donde vemos que tipo de razonamientos físicos se pueden hacer en base a las descomposiciones en suma directa de representaciones irreducibles.

Ejercicio 3.4.1 Demuestra las siguientes descomposiciones,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 3 \otimes 8 = 3 \oplus \bar{6} \oplus 15, \\
 (b) \quad & 8 \otimes 10 = 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 35.
 \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

Solución

(a) Para desarrollar este ejemplo, resulta más sencillo poner las etiquetas en la primera tabla, ya que de esta forma necesitaremos poner menor cantidad de etiquetas,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.50)$$

En este caso, no tenemos ninguna caja en el segundo piso, por lo que tan sólo necesitamos aplicar la primera regla, tras lo cual tenemos las tres siguientes tablas,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & a \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline a & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.51)$$

Comparando con la tabla 3.2, vemos que estas tres tablas representan justamente las representaciones 15, $\bar{6}$ y 3, que es justamente lo que se nos pide demostrar.

(b) El producto que debemos considerar es

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.52)$$

Dado que la representación 10 sólo tiene una fila, de nuevo nos basta tan sólo con repartir las tres cajas a de forma que no queden en la misma fila. Al hacerlo, nos salen directamente las cajas necesarias según el enunciado.

Ejercicio 3.4.2 Calcular el producto directo de las representaciones 10 y 27. Debe hacerse etiquetando las cajas de la representación 27 para poner en práctica todas las reglas dadas.

Solución El primer paso es poner las etiquetas necesarias,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & a & a \\ \hline b & b & & \\ \hline \end{array}. \quad (3.4.53)$$

Ahora, repartimos todos los factores a de todas las formas posibles,

$$\begin{aligned} (i) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a & a \\ \hline \end{array}, & (ii) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a \\ \hline a & & & & & \\ \hline \end{array}, \\ (iii) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline a & a & & & \\ \hline \end{array}, & (iv) & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline a & a & a & \\ \hline \end{array}. \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

El siguiente paso consiste en añadir las dos b 's, de forma que no se contradiga la cuarta regla, es decir, que nunca nos encontremos con un mayor número de b 's que de a 's leyendo las etiquetas, tal como nos dice la regla, de derecha a izquierda y de arriba a abajo,

$$\begin{aligned} (i) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a & a \\ \hline b & b & & & & & \\ \hline \end{array}, \\ (ii) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a \\ \hline a & b & b & & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a \\ \hline a & b & & & & \\ \hline b & & & & & \\ \hline \end{array}, \\ (iii) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline a & a & b & b & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline a & a & b & & \\ \hline b & & & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline a & a & & & \\ \hline b & b & & & \\ \hline \end{array}, \\ (iv) & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline a & a & a & b \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline a & a & a & \\ \hline b & b & & \\ \hline \end{array}. \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

Retirando los factores singlete, el resultado es

$$10 \otimes 27 = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} . \end{array} \quad (3.4.56)$$

Algunas de estas representaciones no aparecen en la tabla 3.2, pero teniendo en cuenta la forma general de una tabla y la expresión de $D(p, q)$ podemos saber su nombre. El resultado final es,

$$10 \otimes 27 = 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27 \oplus 35 \oplus \bar{35} \oplus 64 \oplus 81 . \quad (3.4.57)$$

Ejercicio 3.4.3 En este caso, consideraremos que hablamos de estados de color. Dado que el lagrangiano tiene simetría de color, los únicos estados permitidos en la naturaleza son aquellos que son invariantes, es decir, los singletes. Demuestra que no puede existir un estado ligado de un quark con un gluón.

Solución Los quarks transforman en la representación 3, y los gluones en la adjunta, 8. Por lo tanto, un estado ligado entre ambas partículas estaría en la representación $3 \otimes 8$, que como vimos en el ejercicio 3.4.1(a), se descompone en

$$3 \otimes 8 = 3 \oplus \bar{6} \oplus 15 . \quad (3.4.58)$$

Como vemos, esta descomposición no contiene ningún factor singlete. Es decir, no existe la posibilidad de que un quark y un gluón, si forman un estado ligado, se encuentren en un estado invariante bajo la simetría de color; lo que va en contra del principio de simetría gauge. Es decir, dicho estado ligado está prohibido.

3.5. Clasificación de los hadrones

3.5.1. Mesones

La clasificación de los hadrones, que como ya dijimos en el primer capítulo, son las partículas formadas por quarks, se hace a partir de las diferentes representaciones del grupo $SU_F(3)$ (de sabor, «*flavour*» en inglés) a las que pertenece cada partícula. Por ejemplo, los mesones se forman a partir de un quark, en la representación 3; y de un antiquark, en la representación $\bar{3}$. Los estados ligados de estas partículas se realizarán en alguna de las representaciones en que se puede descomponer su producto directo,

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 , \quad (3.5.1)$$

como se puede demostrar utilizando las técnicas descritas en la sección anterior. Es decir, tendremos una partícula escalar (bajo $SU_F(3)$), y ocho mesones más agrupados en un octete. Dado que tenemos ocho grados de libertad, nos sugiere la posibilidad de representar el octete mediante una matriz 3×3 sin traza (dado que la condición de no tener traza resta un grado de libertad). Dicha matriz se puede formar mediante los vectores de quarks y antiquarks,

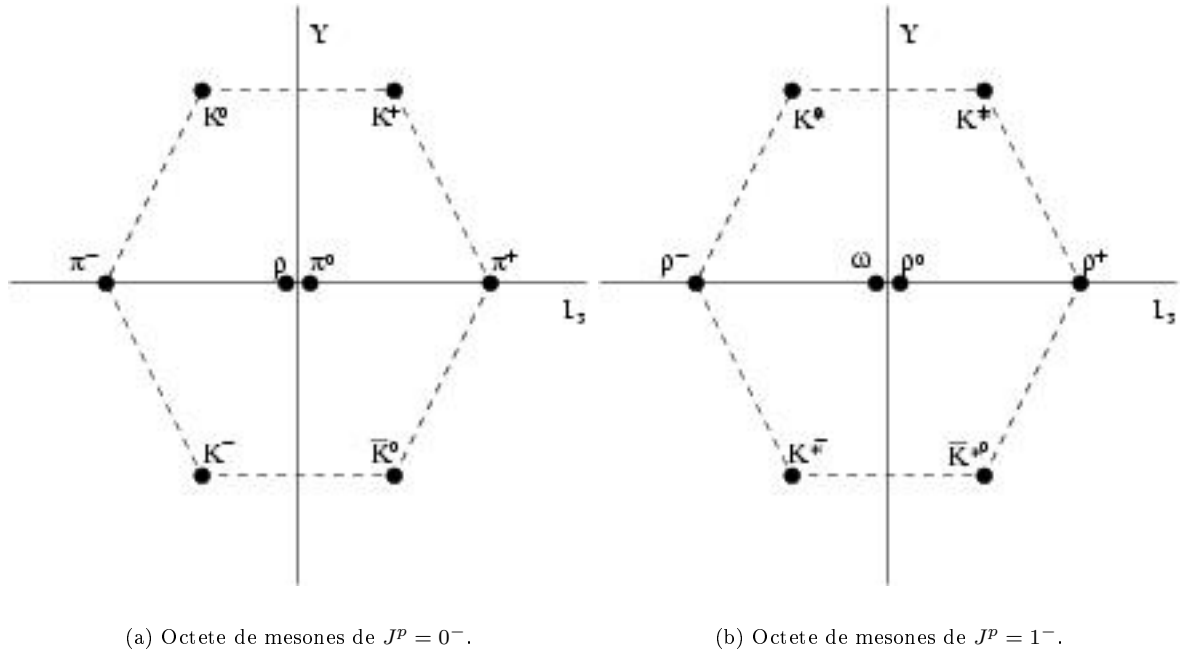
$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} , \quad \bar{\psi} = (\bar{u} \quad \bar{d} \quad \bar{s}) . \quad (3.5.2)$$

Podemos construir una matriz sin traza a partir de estos vectores tal que así,

$$M = \psi \bar{\psi} - \frac{1}{3} \mathbb{1}_{3 \times 3} \text{tr}(\psi \bar{\psi}) . \quad (3.5.3)$$

Realizando la multiplicación matricial obtenemos

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}) & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} + 2d\bar{d} - s\bar{s}) & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} - d\bar{d} + 2s\bar{s}) \end{pmatrix} . \quad (3.5.4)$$

Figura 3.7: Distribución de los mesones en el plano $Y-I_3$.

Si se compara la matriz anterior con el contenido de quarks de los mesones pseudo-escalares, con $J^P = 0^-$, (ver, por ejemplo [1])

$$\begin{aligned}
 \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) , & \eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) , \\
 \pi^+ &= u\bar{d} , & \pi^- &= d\bar{u} , \\
 K^+ &= u\bar{s} , & K^- &= s\bar{u} , \\
 K^0 &= d\bar{s} , & \bar{K}^0 &= s\bar{d} .
 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

podemos ver que

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} . \tag{3.5.6}$$

Los diferentes mesones cargaran con los diferentes valores de los números cuánticos de isospin y hipercarga correspondientes a la representación 8. En la figura 3.7(a) podemos ver su distribución en el plano $Y-I_3$. También tenemos un segundo octete de mesones, con un spin-paridad de $J^P = 1^-$. Las partículas que lo componen se muestran en la figura 3.7(b).

3.5.2. Bariones

Los bariones son hadrones construidos por tres quarks, por lo que se hayan en la representación $3 \otimes 3 \otimes 3$. Una estrategia para calcular la descomposición de este producto consiste en calcular primero el producto de solo dos representaciones,

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 , \tag{3.5.7}$$

y realizar la multiplicación por el tercer 3 a todas las partes del resultado intermedio (propiedad distributiva del producto directo),

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 . \tag{3.5.8}$$

Por lo tanto, tendremos un octete y un decuplete de hadrones. El contenido en quarks del octete es

$$\begin{aligned} p &= uud , & n &= udd , & \Lambda &= uds , \\ \Sigma^+ &= uus , & \Sigma^0 &= uds , & \Sigma^- &= dds , \\ \Xi^+ &= dss , & \Xi^0 &= uss . \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

La posición de estas partículas en el plano hipercarga-isospin, es decir, sus números cuánticos, pueden observarse en la figura 3.8. También estas partículas pueden escribirse en disposición matricial mediante la *matriz de bariones*, que utilizaremos en los próximos capítulos, cuya forma es la siguiente,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} . \quad (3.5.10)$$

Por otra parte, el decuplete de bariones puede ser descrito mediante un tensor de tres índices totalmente simétrico, T_{abc} , que tiene exactamente los grados de libertad necesarios. Sus componentes se pueden escribir, de nuevo, en términos de las partículas físicas,

$$\begin{aligned} T_{111} &= \Delta^{++} , & T_{112} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+ , & T_{122} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0 , & T_{222} &= \Delta^- , \\ T_{113} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+} , & T_{123} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*0} , & T_{223} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-} , & T_{333} &= \Omega^- , \\ T_{133} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0} , & T_{113} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-} . \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Todas estas partículas tienen un spin-paridad $J^P = (3/2)^+$. En la figura 3.9 se pueden encontrar los números cuánticos de isospin e hipercarga correspondientes a las partículas del decuplete de bariones.

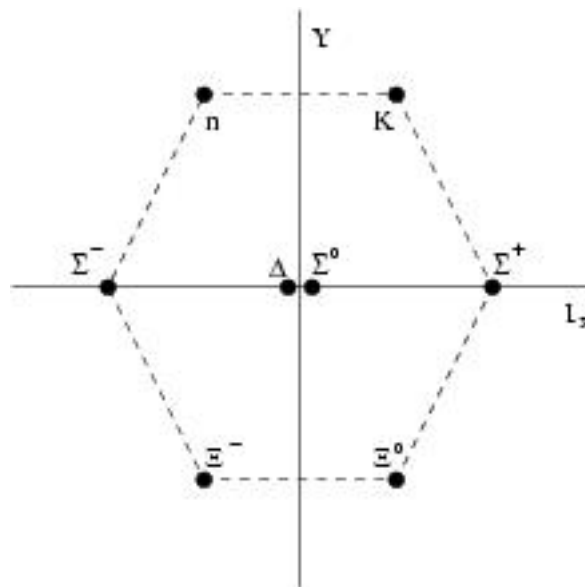


Figura 3.8: Números cuánticos del octete de bariones.

Capítulo 4

Teorías efectivas

En la naturaleza los quarks no aparecen aislados, sino que siempre aparecen agrupados en parejas quark–antiquark, o en tríos de quarks, para formar mesones y bariones, respectivamente. Por lo tanto, en muchas ocasiones no nos interesa escribir nuestros lagrangianos en términos de los quarks, sino que nos sería más útil escribirlo en términos de las partículas físicas que podemos observar con los aceleradores de partículas, los hadrones. Esto es lo que llamamos una *teoría efectiva*.

En este capítulo vamos a estudiar diferentes teorías efectivas para las partículas que hemos clasificado en el capítulo anterior. En primer lugar, realizaremos detalladamente el proceso de construcción de una teoría efectiva para el octete de bariones. Seguidamente, aplicaremos el mismo proceso a los bariones del decuplete, si bien esta vez no realizaremos todos los cálculos de forma tan detallada.

Nuestro siguiente paso será utilizar el modelo sigma no lineal para obtener una teoría efectiva para los mesones (que también se transforman según un octete). Para acabar el capítulo, aplicaremos la teoría efectiva que habremos construido para los mesones para describir el proceso de interacción elástica de cuatro piones.

4.1. Octete de bariones

4.1.1. Rompimiento de la simetría

Ahora que hemos caracterizado y clasificado las partículas de la teoría, queremos encontrar el lagrangiano que las describe. De momento, no nos preocuparemos de las interacciones. El lagrangiano se puede escribir como el de Dirac, donde el campo se substituye por la matriz de bariones, ec. (3.5.10),

$$\mathcal{L} = \text{tr} \left[\bar{B} (i \not{\partial} - M_0) B \right], \quad (4.1.1)$$

donde, si consideramos las masas de los quarks ligeros iguales, tenemos $M = \mathbb{1} \tilde{M}_0$. Naturalmente, en estas condiciones, B se transforma de forma homogénea bajo transformaciones del grupo de simetría $SU_{L+R}(3)$,

$$B \xrightarrow{SU_{L+R}(3)} U_{L+R} B U_{L+R}^\dagger, \quad (4.1.2)$$

y, por tanto, el lagrangiano es invariante (dada la propiedad cíclica de la traza).

No obstante, en la naturaleza no es cierto que la masa de los tres quarks ligeros sea exactamente igual, sino que tenemos una matriz de masas de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (4.1.3)$$

que no es invariante ante las transformaciones del grupo,

$$M \longrightarrow U_{L+R}^\dagger M U_{L+R} \neq M. \quad (4.1.4)$$

Por lo tanto, el término de masas rompe la simetría $SU_{L+R}(3)$ de sabor. Sin embargo, esta simetría se rompe de una forma muy concreta, dada por la ecuación (4.1.4), lo que nos sugiere la posibilidad de añadir términos al lagrangiano que rompan la simetría de la misma forma.

4.1.2. Construcción de los términos que rompen la simetría

Dada que la simetría es correcta en primera aproximación, podemos suponer que los términos que la rompen son de primer orden en las masas. Lo cual, nos permite considerar M como una perturbación,

$$\mathcal{L} = \text{tr} \left[\bar{B} (i \not{\partial} - M_0) B \right] + o(M) , \quad (4.1.5)$$

donde M_0 es la matriz de masas en la aproximación de masas iguales. Para construir los términos, suponemos de forma ficticia que la matriz de masas, M , se transforma de la forma adecuada para conservar la simetría,

$$M \xrightarrow{\text{ficticiamente}} U_{L+R} M U_{L+R}^\dagger . \quad (4.1.6)$$

Con esta matriz de masas ficticia invariante, construimos todos los términos invariantes posibles, a un determinado orden en M . En nuestro caso, tan sólo estamos interesados en el primer orden, por lo cual consideraremos términos en donde aparecen productos de \bar{B} , B y M .

Dado que las tres matrices se transforman bajo la representación 8, puesto que estamos considerando los bariones del octete, el producto de las tres matrices se transformará bajo la representación

$$8 \otimes 8 \otimes 8 = 1 \oplus 1 \oplus \overbrace{8 \oplus \dots}^8 \oplus \overbrace{10 \oplus \dots}^3 \oplus \overbrace{\bar{10} \oplus \dots}^4 \oplus \overbrace{27 \oplus \dots}^5 \oplus 35 \oplus 35 \oplus 64 . \quad (4.1.7)$$

donde $\overbrace{m \oplus \dots}^n$ representa n copias de la representación m . La demostración de esta igualdad se deja como ejercicio.

Ejercicio 4.1.1 Demostrar la ecuación (4.1.7) a partir de las técnicas de las tablas de Young.

Solución En primer lugar, tenemos que resolver el producto $8 \otimes 8$. Esto fue hecho en el capítulo anterior, ec. (3.4.48), a saber,

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27 \\ &= \bullet \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} , \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Ahora debemos realizar la multiplicación directa de todas las representaciones que aparecen en la descomposición anterior por la representación 8. La multiplicación por el singlete es trivial. El producto de dos representaciones 8 es ya conocido. Los siguientes productos se realizan utilizando las técnicas ya conocidas,

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline a & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline a & b & & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline b & & a & a \end{array} \\ &= 8 \otimes 10 \otimes 27 \oplus 35 , \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & b \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & b \end{array} \\ &= 8 \oplus \bar{10} \oplus 27 \oplus \bar{35} , \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline a & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & a & a \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & a \\ \hline & & a & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & a \\ \hline & & & a & a \end{array} \\ &\quad \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & a \\ \hline & & & a & b \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & b & & \end{array} \\ &= 8 \oplus \bar{10} \oplus 27 \oplus 35 \oplus \bar{35} \oplus 64 , \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Juntando todos los resultados, obtenemos justamente el resultado que buscamos.

Lo único que nos interesa de la descomposición (4.1.7) es que tan sólo existen dos factores singlete, es decir, mediante el producto de tres elementos que transformen en la representación adjunta tan sólo podemos encontrar dos elementos invariantes, a saber

$$\text{tr} \bar{B} B M , \quad \text{tr} \bar{B} M B . \quad (4.1.12)$$

Se podría pensar que existe otro término invariante,

$$\text{tr} M \text{tr} \bar{B} B , \quad (4.1.13)$$

pero, dado que la traza de $\bar{B} B$ es una simple constante, este término tan sólo contribuye al término de masas usual, por lo que podemos obviarlo redefiniendolo,

$$M_0 \longrightarrow \left(\tilde{M}_0 + g_3 \text{tr} M \right) \mathbb{1} , \quad (4.1.14)$$

donde g_3 es la constante de acoplamiento de este tercer invariante, con el factor $\text{tr} \bar{B} B$ ya absorbido. Por lo tanto, los nuevos términos que podemos añadir al lagrangiano son

$$\delta \mathcal{L} = g_1 \text{tr} \bar{B} B M + g_2 \text{tr} \bar{B} M B . \quad (4.1.15)$$

Como ya hemos remarcado, estos términos serían invariantes si consideramos, de forma ficticia, que M transforma homogéneamente. Así, pues, en realidad estos términos rompen la simetría, pero lo hacen de la misma forma que M . Su efecto en el lagrangiano se traducirá en unas masas ligeramente diferentes en las diferentes partículas del octete de bariones.

Otra forma de escribir estos términos, utilizando las propiedades de la traza, es la que sigue,

$$\delta \mathcal{L} = g_1 \text{tr} \left(\delta M \left[\bar{B}, B \right] \right) + g_2 \text{tr} \left(\delta M \left\{ \bar{B}, B \right\} \right) , \quad (4.1.16)$$

donde g_1 y g_2 son unas nuevas constantes de acoplamiento, no necesariamente iguales a las anteriores. Mantendremos su nombre por simplicidad en la notación. Por otra parte, hemos reescrito la matriz de masas de la forma

$$M = M_0 + \delta M , \quad (4.1.17)$$

donde $M_0 = \tilde{M}_0 \mathbb{1}$ es diagonal. Dado que la masa de los quarks «up» y «down» es prácticamente igual, podemos situarnos en la aproximación en que son idénticas, $m_u = m_d$. Por lo tanto, δM deberá ser una matriz diagonal cuyos dos primeros elementos diagonales sean iguales, y tan sólo el tercero sea diferente. Recordando la expresión de las matrices de Gell–Mann, esto significa que δM debe ser proporcional a λ_8 . Para comprobar explícitamente esto, podemos descomponer en suma de las matrices de Gell–Mann la matriz de masas,

$$\begin{aligned} M &= \text{diag}(m_u, m_d, m_s) \\ &= \frac{1}{3}(m_u + m_d + m_s) \mathbb{1} + \frac{1}{2}(m_u - m_d) \lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(m_u + m_d - 2m_s) \lambda_8 . \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Podemos identificar el primer término con M_0 . Como vemos, si tomamos $m_u = m_d$, efectivamente $\delta M = M - M_0$ es proporcional a λ_8 . Si no realizáramos esta aproximación, también deberíamos considerar un término proporcional a λ_3 .

4.1.3. Lagrangiano en términos de las partículas físicas

Por otra parte, podemos realizar una descomposición similar con la matriz de bariones,

$$B = B^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} , \quad (4.1.19)$$

donde los coeficientes B^a se pueden relacionar con las partículas físicas en virtud de la expresión de la matriz B , ecuación (3.5.10),

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 - iB_2) , & \Xi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_4 + iB_5) , & p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_4 - iB_5) , \\ \Sigma^0 &= B_3 , & \Xi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_6 + iB_7) , & n &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_6 - iB_7) , \\ \Sigma^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + iB_2) , & \Lambda &= B_8 . \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Lo mismo se puede repetir para los antibariones, teniendo en cuenta que las matrices de Gell-Mann son hermiticas,

$$\bar{B} = \bar{B}^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} . \quad (4.1.21)$$

Esta descomposición nos permite calcular fácilmente las diferentes trazas que intervienen en el Hamiltoniano, teniendo en cuenta la relación de normalización, ec. (2.3.17). Comenzamos por la traza de $\bar{B}B$,

$$\begin{aligned} \text{tr} \bar{B}B &= \bar{B}^a B^b \text{tr} \left(\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \bar{B}^a B^a . \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

También necesitamos las trazas de los nuevos términos del lagrangiano: las correspondientes al conmutador y al anticonmutador. La primera de ellas se puede calcular de forma sencilla,

$$\begin{aligned} \bar{B}^a B^b \text{tr} \left(\lambda_8 \left[\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right] \right) &= \sqrt{2} i \bar{B}^a B^b f^{abc} \text{tr} \left(\lambda_8 \frac{\lambda^c}{\sqrt{2}} \right) , \\ &= 2i \bar{B}^a B^b f^{ab8} . \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Comparando con la ecuación (2.3.15), vemos que las únicas constantes de estructura que aparecen son

$$f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad (4.1.24)$$

Por último, necesitamos calcular la traza del término que contiene el anticonmutador,

$$\bar{B}^a B^b \text{tr} \left(\lambda_8 \left\{ \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right\} \right) . \quad (4.1.25)$$

El conmutador de dos matrices de Gell-Mann se puede escribir de la guisa

$$\left\{ \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{2}{N_f} \delta^{ab} \mathbb{1} + \sqrt{2} d^{abc} \frac{\lambda^c}{\sqrt{2}} , \quad (4.1.26)$$

donde d^{abc} son unas nuevas constantes, totalmente simétricas en todos sus índices. Con lo cual, tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{B}^a B^b \text{tr} \left(\lambda_8 \left\{ \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda^b}{\sqrt{2}} \right\} \right) &= \bar{B}^a B^b \text{tr} \left[\lambda_8 \left(\frac{4}{N_f} \delta^{ab} \mathbb{1} + \sqrt{2} d^{abc} \frac{\lambda^c}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \bar{B}^a B^b d^{abc} \text{tr} \left(\lambda_8 \frac{\lambda^c}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2i \bar{B}^a B^b d^{ab8} . \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Las únicas constantes que aparecen son

$$\begin{aligned} d^{118} = d^{228} = d^{338} = -d^{888} &= \frac{1}{\sqrt{3}} , \\ d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} . \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Recopilando todos estos resultados, vemos que los nuevos términos del lagrangiano se pueden escribir de la forma

$$\delta \mathcal{L} \sim 2i \bar{B}^a B^b \left(g_1 f^{ab8} + g_2 d^{ab8} \right) , \quad (4.1.29)$$

donde, de momento, obviamos la constante $(m_u - m_s)$ que proviene de la descomposición de M en términos de las matrices de Gell-Mann. El término entre paréntesis puede escribirse de forma matricial tal que así,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} g_1 \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} g_2 \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} . \quad (4.1.30)$$

Desarrollando los productos matriciales, obtenemos el siguiente resultado,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \sim & 2ig_1 \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{B}_4 B_5 - \bar{B}_5 B_4 + \bar{B}_6 B_7 - \bar{B}_7 B_6) \\ & + 2ig_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\bar{B}_1 B_1 + \bar{B}_2 B_2 + \bar{B}_3 B_3 - \frac{1}{2} (\bar{B}_4 B_4 + \bar{B}_5 B_5 + \bar{B}_6 B_6 + \bar{B}_7 B_7) - \bar{B}_8 B_8 \right). \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Finalmente, podemos expresar estos términos en función de las partículas físicas, que se expresan en función de B^a según la expresión (4.1.20). El resultado que se obtiene es el siguiente,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \sim & -\sqrt{3}g_1 (\bar{p}p + \bar{n}n - \bar{\Xi}^- \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \Xi^0) \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}}g_2 \left(\bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 - \bar{\Lambda}\Lambda - \frac{1}{2} (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0) \right). \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

4.1.4. Masas de los bariones del octete. Relación de Gell-Mann–Okubo

Como vemos, todos los términos tienen la forma de un término de masas. De esta forma, estos términos nos dan información sobre cómo varían la masa de las partículas a causa del rompimiento de la simetría. Para hallar las masas de forma exacta, necesitamos escribir también el término de masas invariante en función de las partículas físicas,

$$\begin{aligned} M_0 \text{tr} \bar{B}B &= M_0 \bar{B}_a B_a \\ &= M_0 (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Lambda}\Lambda), \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

que, como vemos, vuelve a ser diagonal. Esto es un reflejo de que, en la aproximación de los tres quarks ligero con la misma masa, $SU_{L+R}(3)$, estas partículas forman parte de la misma representación (el octete), y por lo tanto deben tener la misma masa.

Finalmente, juntando las ecuaciones (4.1.32) y (4.1.33), podemos predecir la masa de las partículas a partir de las constantes de acoplamiento, de la masa de los quarks «up» y «down», m , y del quark «strange», m_s . Lo primero que observamos es que las partículas con el mismo isospin tienen la misma masa, tal y como era de esperar ya que nos hemos situado en la aproximación de isospin. Los resultados que se obtienen son

$$M_p = M_n = M_0 - \sqrt{3}g_1(m - m_s) - \frac{1}{\sqrt{3}}g_2(m - m_s), \quad (4.1.34a)$$

$$M_{\Xi} = M_0 + \sqrt{3}g_1(m - m_s) - \frac{1}{\sqrt{3}}g_2(m - m_s), \quad (4.1.34b)$$

$$M_{\Sigma} = M_0 + \frac{2}{\sqrt{3}}g_2(m - m_s), \quad (4.1.34c)$$

$$M_{\Lambda} = M_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}g_2(m - m_s), \quad (4.1.34d)$$

donde hemos recuperado el coeficiente $(m - m_s)$ que proviene de la descomposición de δM en términos de las matrices de Gell-Mann, ec. (4.1.18). Estas expresiones dependen de la elección de las constantes del lagrangiano; M , g_1 y g_2 . No obstante, tenemos tres constantes y cuatro relaciones, con lo cual podemos deducir una relación que sea independiente de las tres constantes. La obtención de dicha relación se deja como ejercicio. El resultado que se debe obtener es

$$3M_{\Lambda} + M_{\Sigma} = 2(M_p + M_{\Xi}). \quad (4.1.35)$$

Esta ecuación se denomina *relación de Gell-Mann–Okubo*, y representa la primera relación totalmente independiente del modelo que hemos logrado en nuestro curso. Comprobando los resultados experimentales para las masas de las diferentes partículas, obtenemos

$$3M_{\Lambda} + M_{\Sigma} = 4539,9 \text{ MeV}, \quad (4.1.36)$$

$$2(M_p + M_{\Xi}) = 4514,0 \text{ MeV}, \quad (4.1.37)$$

y, por lo tanto, la relación de Gell-Mann–Okubo se cumple en muy buena aproximación, con una discrepancia relativa del 0,6 %.

Ejercicio 4.1.2 (Relación de Gell-Mann–Okubo) Deducir la relación de Gell-Mann–Okubo, dada por la ecuación (4.1.35), a partir de la expresión de las masas de las partículas del octete de bariones, ec. (4.1.34).

Solución Sumando las ecuaciones (4.1.34c) y (4.1.34d) podemos encontrar el valor de M_0 ,

$$M_0 = \frac{1}{2}(M_\Sigma + M_\Lambda) . \quad (4.1.38)$$

Por otra parte, restando las mismas ecuaciones, podemos aislar el término que contiene g_2 ,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}g_2(m - m_s) = \frac{1}{2}(M_\Sigma - M_\Lambda) . \quad (4.1.39)$$

Con todo esto, las ecuaciones (4.1.34a) y (4.1.34b) se escriben de la forma

$$M_p = \frac{1}{4}(M_\Sigma + 3M_\Lambda) - \sqrt{3}g_1(m - m_s) , \quad (4.1.40)$$

$$M_\Xi = \frac{1}{4}(M_\Sigma + 3M_\Lambda) + \sqrt{3}g_1(m - m_s) . \quad (4.1.41)$$

Finalmente, sumando estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$M_p + M_\Xi = \frac{1}{2}(M_\Sigma + 3M_\Lambda) , \quad (4.1.42)$$

que no es más que la relación que estamos buscando.

4.2. Decuplete de bariones

Tal y como dijimos en el capítulo anterior, el decuplete de bariones se puede describir mediante un tensor de tres índices totalmente simétrico, T_{abc} . Siguiendo el mismo procedimiento de antes, suponiendo de forma ficticia que la matriz de masas M transforma de forma homogénea, nos interesa formar todos los términos invariantes posibles que se puedan formar como producto de M (que transforma en la representación 8), T_{abc} (que transforma según 10) y \bar{T}_{abc} (que transforma según $\bar{10}$). Para saber cuantos invariantes de este tipo existen, debemos calcular la descomposición del producto directo de estas representaciones,

$$8 \otimes 10 \otimes \bar{10} = 1 \oplus \overbrace{8 \oplus \dots}^4 \oplus 10 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus \overbrace{27 \oplus \dots}^4 \oplus 35 \oplus 35 \oplus \bar{35} \oplus \overbrace{64 \oplus \dots}^3 \oplus 81 \oplus \bar{81} \oplus 125 . \quad (4.2.1)$$

Ejercicio 4.2.1 Demostrar la ecuación (4.2.1).

Solución El procedimiento es idéntico al utilizado en la sección anterior. Daremos tan sólo los resultados intermedios. En primer lugar, calculamos $10 \otimes \bar{10}$,

$$10 \otimes \bar{10} = 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64 . \quad (4.2.2)$$

No queda realizar la multiplicación por 8 de la ecuación anterior. Los resultados son

$$1 \otimes 8 = 8 , \quad (4.2.3a)$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27 , \quad (4.2.3b)$$

$$27 \otimes 8 = 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 27 \oplus 35 \oplus \bar{35} \oplus 64 , \quad (4.2.3c)$$

$$64 \otimes 8 = 27 \oplus 35 \oplus 64 \oplus 64 \oplus 81 \oplus \bar{81} \oplus 125 . \quad (4.2.3d)$$

Es decir, tan sólo tenemos un invariante, a saber

$$\bar{T}_{abc}(M)_a^d T_{dbc} . \quad (4.2.4)$$

Al igual que en el caso del octete, podemos añadir un término que contiene la traza de la masa,

$$\text{tr} M \bar{T}_{abc} T_{abc} , \quad (4.2.5)$$

que, al igual que antes, tan sólo afectará al término de masas inicial, M_0 . Con lo cual, la suma de todos los términos que contienen la masa son

$$\delta\mathcal{L} = M_0 T_{abc} T_{abc} + \alpha \bar{T}_{abc}(M)_a^d T_{dbc} + \beta \text{tr} M \bar{T}_{abc} T_{abc} . \quad (4.2.6)$$

En la aproximación de isospin, $m_u = m_d$, en esta ocasión podemos incluir toda la diferencia de masas del «strange» en M , por lo que tendremos $M = \text{diag}(0, 0, \delta m_s)$. Siguiendo la analogía con el caso anterior, debemos representar este lagrangiano en términos de las partículas físicas, que vienen dadas por la ecuación (3.5.11),

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = (M_0 + \beta \delta m_s) & \left[\bar{\Delta}^{++} \Delta^{++} + \bar{\Delta}^+ \Delta^+ + \bar{\Delta}^0 \Delta^0 + \bar{\Delta}^- \Delta^- + \bar{\Sigma}^{*+} \Sigma^{*+} + \bar{\Sigma}^{*0} \Sigma^{*0} + \bar{\Sigma}^{*-} \Sigma^{*-} \right. \\ & + \bar{\Xi}^{*0} \Xi^{*0} + \bar{\Xi}^{*-} \Xi^{*-} + \bar{\Omega}^- \Omega^- \left. \right] + \frac{1}{3} \alpha \delta m_s \left[\bar{\Sigma}^{*+} \Sigma^{*+} + \bar{\Sigma}^{*0} \Sigma^{*0} + \bar{\Sigma}^{*-} \Sigma^{*-} \right. \\ & + 2 \bar{\Xi}^{*0} \Xi^{*0} + 2 \bar{\Xi}^{*-} \Xi^{*-} + \bar{\Omega}^- \Omega^- \left. \right] . \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

De nuevo, vemos que las partículas en el mismo multiplete de spin tienen la misma masa. De este lagrangiano resulta evidente que la diferencia de masas entre partículas cuya diferencia de extrañeza es la unidad, se diferencian en su masa por un factor δm_s , de lo que resultan las siguientes relaciones de Gell-Mann–Okubo,

$$M_\Omega - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_\Delta . \quad (4.2.8)$$

Históricamente, esta relación sirvió a Gell-Mann para calcular la masa de la partícula Ω^- , y este cálculo le valió el premio Nobel, ya que su confirmación experimental sirvió de prueba al modelo de quarks.

4.3. Modelo sigma no lineal

4.3.1. Obtención del lagrangiano

Ahora, nos proponemos estudiar el modelo sigma no lineal con el objetivo de describir los bosones de Goldstone (los mesones del octete) asociados con el rompimiento de la simetría $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ a $SU_v(3)$. No obstante, esta no es la única forma de estudiar estas partículas; un tratamiento alternativo puede verse en [10, 11].

El lagrangiano del modelo sigma no lineal es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} \left(\partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M \right) - \frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{2} \text{tr} M^\dagger M + \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 , \quad (4.3.1)$$

donde

$$M = \sigma + i\tau^a \phi^a , \quad \frac{1}{2} \text{tr} M^\dagger M = \sigma^2 + \phi^2 . \quad (4.3.2)$$

Si consideramos los piones, es decir, los quarks «up» y «down», τ^a serán proporcionales a las matrices de Pauli. Además, la transformación de M será

$$M \longrightarrow L M R^\dagger , \quad (4.3.3)$$

donde $L \in SU_L(2)$ y $R \in SU_R(2)$. Llegados a este punto, nos interesa realizar el siguiente cambio de variables,

$$M = \rho U , \quad U = e^{2i \frac{\tau^a}{v} \pi^a} , \quad (4.3.4)$$

donde v es una constante arbitraria. Nótese que no hemos variado el número de grados de libertad, inicialmente teníamos cuatro campos, σ y tres ϕ^a ; que han sido reemplazados por otros cuatro campos, ρ y tres π^a . En estas nuevas variables, el lagrangiano resulta ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \rho \right) \left(\partial^\mu \rho \right) + \frac{1}{4} \rho^2 \text{tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) - V(\rho) , \quad (4.3.5)$$

donde

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{4} \left[\frac{1}{2} \text{tr} M^\dagger M + \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^2 . \quad (4.3.6)$$

Dado que U es unitaria, en estas coordenadas tenemos $\text{tr} M^\dagger M = \rho^2$, con lo cual podemos escribir el potencial de la guisa

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{4} \left[\frac{1}{2} \rho^2 + \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^2. \quad (4.3.7)$$

El mínimo del potencial (4.3.7) se encuentra en

$$\rho_{\text{mín}}^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = v^2. \quad (4.3.8)$$

Por comodidad, elegimos $v := \rho_{\text{mín}}^2$. Con lo cual, salvo una constante aditiva (que obviarnos, ya que su efecto es un corrimiento en el origen de energías) y factor multiplicativo constante (que absorbemos en las constantes), podemos reescribir el potencial de la guisa

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{2} v^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \rho^4. \quad (4.3.9)$$

En la aproximación $\lambda \rightarrow \infty$, y dado que en la fórmula de la integra de caminos el potencial aparece exponenciado,

$$e^S \sim e^{-V}, \quad (4.3.10)$$

tan sólo contribuirá a la integral el valor mínimo, es decir, $\rho = v$.

Por otra parte, vemos que el primer término del potencial se puede interpretar como un término de masas para el campo ρ ,

$$m_\rho^2 = \lambda v^2. \quad (4.3.11)$$

Además, podemos interpretar el segundo término del potencial como un término de interacción de las partículas ρ , en un vértice de cuatro patas externas.

En condiciones normales, la colisión de dos piones para dar dos piones intercambiando una partícula ρ obedecería un diagrama del tipo

$$\rho \quad . \quad (4.3.12)$$

El propagador de la ρ es el de una partícula escalar, que en el límite de bajas energías, $s \ll m_\rho^2$ es de la forma

$$\frac{1}{s - m_\rho^2} \rightarrow \frac{-1}{m_\rho^2}. \quad (4.3.13)$$

Por lo tanto, en el límite $\lambda \rightarrow \infty$, que corresponde a $m_\rho \rightarrow \infty$, el diagrama (4.3.12) se convierte en

$$. \quad (4.3.14)$$

Por lo tanto, en este límite la partícula ρ se desacopla de la teoría. De esta forma, el lagrangiano para bajas energías es

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{v^2}{3} \text{tr} \left(\partial_\mu U \right) \left(\partial^\mu U \right) + o \left(\frac{1}{m_\rho} \right), \quad U = e^{2i\tau^a \pi^a / v}, \quad (4.3.15)$$

y el valor esperado del campo es $\langle \rho \rangle = v$. Por lo tanto, podemos escribir $M \approx vU$, y la transformación de U será la misma que la de M .

Notamos que, en toda la derivación que hemos hecho, no hemos utilizado en ningún momento que el grupo de simetría sea $SU(2)$. Por lo tanto, el mismo procedimiento será válido para $SU(3)$, y el lagrangiano será el mismo. Sin embargo, el caso $SU(2)$ tiene una peculiaridad, cuyo estudio dejamos como ejercicio al lector.

Ejercicio 4.3.1 *Introducid el cambio $\sigma \rightarrow \sigma' + v$ en la definición de M , y llegar al mismo lagrangiano. Con este cambio, el lagrangiano es*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma')(\partial^\mu \sigma') + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_a)(\partial^\mu \pi_a) - \frac{\lambda}{4}(\sigma'^2 + \pi_a^2 + 2F_\pi \sigma') . \quad (4.3.16)$$

En el límite $\lambda \rightarrow \infty$ también se desacopla el campo σ' , y por lo tanto el lagrangiano que obtenemos es el mismo.

4.3.2. Rompimiento de simetría

De nuevo, deseamos introducir los términos de masas que rompen totalmente la simetría $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ del lagrangiano,

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}_L M \psi_R + \text{h.c.} , \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_u & \\ & & m_s \end{pmatrix} . \quad (4.3.17)$$

Los campos transforman de forma homogénea,¹

$$\psi_R \longrightarrow R\psi_R , \quad \bar{\psi}_L \longrightarrow \bar{\psi}_L L^\dagger . \quad (4.3.18)$$

Siguiendo la estrategia de las secciones anteriores, para encontrar todos los términos posibles suponemos por un instante que la matriz de masas se transforma de la forma adecuada para que no se rompa la simetría,

$$M \xrightarrow{\text{ficticiamente}} LMR^\dagger . \quad (4.3.19)$$

De esta forma, el lagrangiano estará formado por todos los términos que serian invariantes si la matriz de masas se transformara de la forma anterior, a saber,

$$\mathcal{L}(\pi) = F_\pi^2 \left\{ \frac{1}{4} \text{tr}(\partial^\mu U)(\partial_\mu U) + \mu \left(\frac{1}{2} \text{tr} U^\dagger M + \text{tr} U M \right) \right\} + o(M)^2 . \quad (4.3.20)$$

Dado que estamos considerando tan sólo el primer orden, podemos expender las exponenciales y escribir el lagrangiano en función de las partículas físicas. Como en las secciones anteriores, esto nos permitirá obtener las masas de las partículas. La realización detallada de todos estos pasos se dejan como ejercicio al lector; aquí nos limitaremos a dar los resultados. En todo momento, trabajamos en la aproximación de isospin, $m = m_u = m_d$. El resultado que se obtiene es

$$m_\pi^2 = 4\mu \text{tr} \left\{ M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\} = 2\mu m , \quad (4.3.21a)$$

$$m_K^2 = 4\mu \text{tr} \left\{ M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\} = \mu(m + m_s) , \quad (4.3.21b)$$

$$m_\pi^2 = 4\mu \text{tr} \left\{ M \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & & \\ & \frac{1}{12} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\} = 2\mu \left(\frac{m}{3} + \frac{2m_s}{3} \right) . \quad (4.3.21c)$$

Por último, estos resultados nos llevan a una nueva relación de Gell-Mann–Okubo,

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_K^2 . \quad (4.3.22)$$

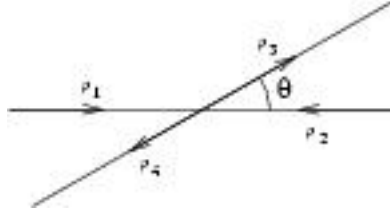
Los resultados experimentales son

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 0,923 \text{MeV}^2 , \quad (4.3.23)$$

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 0,983 \text{MeV}^2 . \quad (4.3.24)$$

Como vemos, la relación se cumple en muy buena aproximación, con una discrepancia del 6,1%.

¹En el caso de los bariones, habíamos supuesto que ψ_L y ψ_R se transformaban igual por que allí estábamos considerando el rompimiento de la simetría $SU_{L+R}(3)$.

Figura 4.1: Esquema cinemático de la colisión $\pi\pi \longrightarrow \pi\pi$.

Ejercicio 4.3.2 Derivar las ecuaciones (4.3.21) y (4.3.22) realizando los pasos esbozados más arriba. Para ello, es útil tener en cuenta la relación entre las bases de las matrices de Gell-Mann y de las partículas físicas,

$$\vec{\phi} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^* + & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (4.3.25)$$

4.4. Colisión elástica de dos piones a primer orden

Para estudiar los procesos de colisión de dos piones para dar dos piones. Partimos del lagrangiano que hemos derivado en la sección anterior,

$$\mathcal{L}(\pi) = F_\pi^2 \left\{ \frac{1}{4} \text{tr}(\partial^\mu U) (\partial_\mu U) + \mu \left(\frac{1}{2} \text{tr} U^\dagger M + \text{tr} U M \right) \right\}. \quad (4.4.1)$$

Por motivos históricos, utilizamos la normalización

$$U = \exp \left\{ i \frac{\sqrt{2}}{F_\pi} \Phi \right\}, \quad \text{donde } \Phi = \pi^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.2)$$

Para encontrar las reglas de Feynman asociadas lagrangiano, debemos realizar la expansión de Taylor de la exponencial. El proceso se deja como ejercicio.

Ejercicio 4.4.1 Expande el lagrangiano hasta orden π^4 y encuentra las reglas de Feynman correspondientes.

Vamos a considerar el proceso de interacción de dos piones que dan dos piones,

$$\pi\pi \longrightarrow \pi\pi. \quad (4.4.3)$$

El diagrama a nivel árbol es el siguiente,

$$\begin{array}{ccc} p_1, \alpha_1 & & p_3, \alpha_3 \\ & \xrightarrow{s} & \\ p_2, \alpha_2 & & p_4, \alpha_4 \end{array}, \quad (4.4.4)$$

donde α_i es el índice de isospin.

Nos situaremos en el sistema de referencia del centro de masas, donde los momentos de las partículas incidentes son iguales pero de signo contrario. Por la conservación del momento, a los momentos salientes les ocurrirá lo mismo, pero en otra dirección, que formará un ángulo θ con la original, tal y como se puede ver en la figura 4.1.

Como siempre en los problemas de colisiones, nos es útil definir las variables invariantes de Mandelstam,

$$s = (p_1 + p_2)^2 , \quad (4.4.5a)$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 , \quad (4.4.5b)$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 . \quad (4.4.5c)$$

Estas tres variables no son independientes, ya que están ligadas por la siguiente condición

$$s + t + u = 4m_\pi^2 . \quad (4.4.6)$$

Dado que el módulo de los tri-momentos deben ser iguales, no es útil definir

$$p_s := |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| . \quad (4.4.7)$$

por conservación de la energía, debemos tener también

$$p_2 = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4| . \quad (4.4.8)$$

Con lo cual, es trivial escribir el valor de s ,

$$s = 4(m_s^2 + p_s^2) . \quad (4.4.9)$$

Los valores de t y u dependerán del ángulo entre las trayectorias iniciales y finales. Por ejemplo, para el cálculo de t tenemos

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= p_3^2 + p_1^2 - 2p_1 p_3 \\ &= 2m_\pi^2 - 2(m_s^2 + p_s^2) + 2\mathbf{p}_2 \mathbf{p} \\ &= -2p_s^2(1 - \cos \theta) . \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Por tanto, tendremos $t \leq 0$. En el cálculo de u , la única diferencia radica en que $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$. Resumiendo, los valores de las variables de Mandelstam son,

$$s = 4(m_\pi^2 + p^2) , \quad (4.4.11a)$$

$$t = -2p_s^2(1 - \cos \theta) , \quad (4.4.11b)$$

$$u = -2p_s^2(1 + \cos \theta) . \quad (4.4.11c)$$

La amplitud de este proceso se puede calcular con las reglas de Feynman obtenidas del ejercicio 4.4.1. El resultado que se obtiene tiene la siguiente estructura,

$$T(s, t, u; \alpha_i) = A(s, t, u) \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_{\alpha_3, \alpha_4} + B(s, t, u) \delta_{\alpha_1, \alpha_3} \delta_{\alpha_2, \alpha_4} + C(s, t, u) \delta_{\alpha_1, \alpha_4} \delta_{\alpha_2, \alpha_3} . \quad (4.4.12)$$

Debido a que los piones son bosones, la amplitud debe satisfacer ciertas simetrías bajo intercambio de partículas, a causa de la estadística de Bose. Estas condiciones se resumen en

$$A(s, t, u) = A(s, u, t) , \quad (4.4.13a)$$

$$B(s, t, u) = A(t, u, s) , \quad (4.4.13b)$$

$$C(s, t, u) = A(u, s, t) . \quad (4.4.13c)$$

Habitualmente, nos interesa descomponer la matriz S en estados de isospin. Dado que el isospin corresponde a la simetría $SU(2)_I$ de intercambio de las masas de los quarks «up» y «down», y que los piones viven en un triplete de isospin $I = 1$, la combinación de los dos piones puede estar en un estado de isospin $I = 0, 1$ o 2 , ya que

$$1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2 , \quad (\text{en } SU_I(2)) . \quad (4.4.14)$$

Por lo tanto, debido a la simetría de isospin la matriz de colisión tendrá la estructura

$$\begin{aligned} \langle II_3 | T | I' I'_3 \rangle &= \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} \langle I | T | I \rangle \\ &= \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} T^I . \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Aplicando las condiciones de Bose, ecs. (4.4.13), los diferentes elementos de matriz T^I se pueden expresar tal que así,

$$T^0 = 3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t) , \quad (4.4.16a)$$

$$T^1 = A(t, u, s) - A(u, s, t) , \quad (4.4.16b)$$

$$T^2 = A(t, u, s) + A(u, s, t) . \quad (4.4.16c)$$

Siguiendo el tratamiento habitual de la matriz T , introducimos un desarrollo en ondas parciales,

$$T^I = 32\pi \sum_{\ell=0} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) t_\ell^I(s) . \quad (4.4.17)$$

Los coeficientes $t_\ell^I(s)$ tienen una forma diferente dependiendo si estamos en una aproximación que tiene en cuenta la relatividad o no. En concreto, para una teoría no relativista tenemos

$$t_\ell^I(s) = \frac{e^{2i\delta_\ell^I(s)} - 1}{2ik} , \quad (4.4.18)$$

mientras que en una teoría relativista tendríamos

$$t_\ell^I(s) = \left(\frac{s}{s - 4m_\pi^2} \right)^{1/2} \frac{1}{2i} \left(e^{2i\delta_\ell^I(s)} - 1 \right) . \quad (4.4.19)$$

En este contexto, es útil definir

$$\frac{W}{p_s} = \left(\frac{s}{s - 4m_\pi^2} \right)^{1/2} , \quad W = 2E = \sqrt{s} . \quad (4.4.20)$$

El lagrangiano de los piones, con término de masas, toma la forma

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \left\{ \left\langle \left(\partial_\mu U \right) \left(\partial^\mu U^\dagger \right) \right\rangle + 2B_0 \left\langle M \left(U + U^\dagger \right) \right\rangle \right\} , \quad (4.4.21)$$

donde hemos empleado la notación $\langle X \rangle := \text{tr} X$. La matriz de masas es proporcional a la unidad $M = m\mathbf{1}_{2 \times 2}$. La masa de los piones se relaciona con las constantes del lagrangiano, B_0 y m , a través de la siguiente relación,

$$m_\pi^2 = 2B_0 m . \quad (4.4.22)$$

Recordando la definición de U , podemos realizar la expansión del primer término,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\partial_\mu U \right) \left(\partial^\mu U^\dagger \right) \right\rangle &= \text{tr} \left[\left(i \frac{\sqrt{2}}{F_\pi} \partial_\mu \Phi - \frac{1}{F_\pi^2} \partial_\mu \Phi^2 - \frac{i\sqrt{2}}{3F_\pi^2} \partial_\mu \Phi^3 \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(i \frac{\sqrt{2}}{F_\pi} \partial^\mu \Phi - \frac{1}{F_\pi^2} \partial^\mu \Phi^2 - \frac{i\sqrt{2}}{3F_\pi^2} \partial^\mu \Phi^3 \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

Los términos que nos dan la interacción a cuatro campos son

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{4}{3F_\pi^4} \text{tr} \left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^3 \right) + \frac{1}{F_\pi^4} \text{tr} \left(\partial_\mu \Phi^2 \partial^\mu \Phi^2 \right) . \quad (4.4.24)$$

También consideramos la contribución del término de masas,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_M &= \frac{4F_\pi^2}{2 \cdot 4!} 2B_0 \left\langle M \frac{\Phi^4}{F_\pi^2} \right\rangle \\ &= \frac{F_\pi^2 B_0}{3!} \frac{4F_\pi^4}{\phi} \phi^b \phi^c \phi^d \text{tr} \left(M \lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d \right) . \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Las reglas de Feynman para el vértice de interacción, que se pueden calcular a partir de las reglas de Feynman generalizadas que vimos en el segundo capítulo, son las siguientes,

a

c

$$I = \frac{i}{F_0^2} \left[(s - m_\pi^2) \delta_{ab} \delta_{cd} + (t - m_\pi^2) \delta_{ab} \delta_{bd} + (u - m_\pi^2) \delta_{ad} \delta_{bc} \right] . \quad (4.4.26)$$

b

d

Dado que estamos a nivel árbol, hemos tenido suficiente con suponer que los cuatro momento externos están sobre la capa másica, $p_i^2 = m_\pi^2$. La demostración de estas reglas de Feynman se dejan como ejercicio. Comparando la ecuación (4.4.12) con nuestras reglas de Feynman, ec. (4.4.26), podemos identificar, finalmente, la amplitud $A(s, t, u)$,

$$A(s, t, u) = \frac{s - m_\pi^2}{F_\pi^2} . \quad (4.4.27)$$

Con este resultado tenemos suficiente para calcular todos los procesos de interacción de cuatro piones a nivel árbol.

Ejercicio 4.4.2 *Obtener las reglas de Feynman de la ecuación (4.4.26) a partir de las recetas generales dadas en el segundo capítulo.*

Orientación *Para facilitar la tarea, vamos a dar el resultado explícito del primero de los dos términos de cuatro campos,*

$$-\frac{4}{3F_\pi^4} \text{tr}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^3) \longrightarrow \frac{i}{F_0^2} \left[(s - \frac{4}{3}m_\pi^2) \delta_{ab} \delta_{cd} + (t - \frac{4}{3}m_\pi^2) \delta_{ab} \delta_{bd} + (u - \frac{4}{3}m_\pi^2) \delta_{ad} \delta_{bc} \right] . \quad (4.4.28)$$

Capítulo 5

Interacciones electromagnéticas y desintegraciones leptónicas débiles

En este último capítulo del curso vamos a estudiar como se introduce las interacciones electrodébiles en el tratamiento. Para hacerlo, comenzaremos construyendo una teoría efectiva del electromagnetismo, siguiendo procedimientos similares a los empleados en el capítulo anterior. Seguidamente, llevaremos a cabo la misma tarea para las interacciones débiles, si bien en este caso no daremos todos los detalles.

Posteriormente, aplicaremos el lagrangiano efectivo que habremos obtenido para efectuar explícitamente el cálculo del proceso de desintegración del pión. El resultado de este cálculo nos dará una pequeña sorpresa, ya que comprobaremos que el canal preferente es el muónico, si bien —a priori— por consideraciones de espacio fásico parecería que el canal predominante debería ser el electrónico.

Por último, estudiaremos la teoría de Fermi-Cabbibo para las interacciones débiles. Empleando esta teoría, realizaremos el cálculo del proceso de desintegración del muón. En primer lugar, realizaremos el cálculo para un haz no polarizado de muones. El resultado nos proporcionará una expresión a partir de la cual podemos medir experimentalmente la constante de acoplamiento del modelo. Finalmente, veremos que el cálculo del mismo proceso, pero con un haz no polarizado, nos lleva a observar la violación de la simetría bajo transformaciones de paridad.

5.1. Construcción del lagrangiano

5.1.1. Lagrangiano y vértice efectivo a nivel de quarks

En este capítulo añadiremos a nuestro lagrangiano la parte de las interacciones electrodébiles, en el sector de los quarks ligeros,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \bar{q}\gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) q - \bar{q}(s - i\gamma_5)q, \quad (5.1.1)$$

donde:

$$r_\mu = v_\mu + a_\mu = eQ A_\mu, \quad (5.1.2)$$

$$\ell_\mu = v_\mu - a_\mu = eQ A_\mu + \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_w} (W_\mu^\dagger T_+ + \text{h.c.}). \quad (5.1.3)$$

Además, $Q = \text{diag}(2, -1, -1)$ es la matriz de carga y

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.4)$$

El lagrangiano (5.1.1) ostenta la simetría $SU_L(3) \otimes U_Y(1)$, que es la responsable de generar los fotones y los tres bosones de gauge de la interacción nuclear débil, W^\pm y Z . La ruptura espontánea de la simetría, sin embargo, es la responsable de que las partículas W^\pm y Z adquieran masa¹.

¹No es así el caso de los fotones, cuya masa nula está protegida de correcciones cuánticas por las identidades de Ward [12].

Por lo tanto, las interacciones nucleares débiles se efectúan intercambiando partículas W^\pm (corrientes cargadas) y Z (corrientes neutras), y el único vértice de la teoría corresponde a la interacción de un portador con dos fermiones. Sin embargo, dado que la masa de los portadores es muy elevada, no se podrán propagar a grandes distancias, y podremos aproximar los vértices por una interacción puntual a cuatro fermiones. Vamos a ver esto con un ejemplo, que posteriormente veremos con más detalle, la desintegración del pión a un muón,

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- \nu_\mu , \quad (5.1.5)$$

que se efectúa según el diagrama

$$\pi^- \left\{ \begin{array}{c} \bar{u} \\ d \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} W^- \\ q \end{array} \quad \begin{array}{c} p \\ -k \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \end{array} . \quad (5.1.6)$$

Dado que la partícula W es mucho mas masiva que el pión, el proceso transcurrirá en la aproximación de bajas energías, por lo que la partícula W tendrá una virtualidad muy alta. A causa de ello, no podrá recorrer una gran distancia. Así, pues, en primera aproximación podemos considerar que la interacción es puntual,

$$\pi^- \left\{ \begin{array}{c} \bar{u} \\ d \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} p \\ -k \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \end{array} . \quad (5.1.7)$$

Otra forma de ver esto es considerar el propagador de la partícula W , que es el correspondiente a una partícula de spin $s = 1$,

$$\frac{i}{q^2 - M_w^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_w^2} \right) \approx \frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2} + o\left(\frac{p^2}{M_w^2}\right) , \quad (5.1.8)$$

con correcciones del orden de q^2/m_W^2 .

5.1.2. Lagrangiano y vértice efectivo a nivel de piones

Ahora bien, nuestro deseo es encontrar el lagrangiano efectivo a nivel de piones, y no a nivel de quarks. Para ello, impondremos que el lagrangiano sea invariante ante transformaciones $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ locales. Siguiendo con la misma notación de los capítulos anteriores, tendremos $L \in SU_L(3)$ y $R \in SU_R(3)$. En este caso, tanto L como R serán funciones de la posición. Las transformaciones de los diferentes elementos de la teoría son

$$q_L \longrightarrow L(x)q_L , \quad (5.1.9a)$$

$$q_R \longrightarrow R(x)q_R , \quad (5.1.9b)$$

$$\ell_\mu \longrightarrow L(x)\ell_\mu L^\dagger(x) + iL(x)\partial_\mu L^\dagger(x) , \quad (5.1.9c)$$

$$r_\mu \longrightarrow R(x)r_\mu R^\dagger(x) + iR(x)\partial_\mu R^\dagger(x) . \quad (5.1.9d)$$

Si las fuentes ℓ_μ y r_μ transformaran de esa forma, \mathcal{L} sería invariante. Por lo tanto, debemos imponer que las U del lagrangiano de piones también se transformen de forma adecuada,

$$U \longrightarrow R(x)U L^\dagger(x) , \quad (5.1.10)$$

$$M \longrightarrow R(x)M L^\dagger(x) . \quad (5.1.11)$$

Finalmente, para acabar de escribir correctamente el lagrangiano, debemos promocionar las derivadas ordinarias de U a derivadas covariantes,

$$\partial_\mu U \longrightarrow D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + i\ell_\mu U , \quad (5.1.12)$$

$$\partial_\mu U^\dagger \longrightarrow D_\mu U^\dagger = \partial_\mu U^\dagger + ir_\mu U^\dagger - i\ell_\mu U^\dagger . \quad (5.1.13)$$

Por lo tanto, a orden dominante, el lagrangiano tendrá la forma

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{4} \left\{ \text{tr} \left(D_\mu U \right) \left(D^\mu U^\dagger \right) + 2B_0 \text{tr} M \left(U + U^\dagger \right) \right\} . \quad (5.1.14)$$

Realizando una expansión en el número de campos, de la misma firma que hicimos en el capítulo anterior, obtendríamos el lagrangiano de interacción de una partícula escalar acoplada al electromagnetismo.

5.2. Lagrangiano efectivo para las interacciones nucleares débiles

El lagrangiano para las interacciones débiles, en el límite $m_\pi^2 \gg m_w^2$, puede aproximarse por el lagrangiano de Fermi,

$$\delta\mathcal{L}_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger} , \quad (5.2.1)$$

donde J^μ es el corriente de Noether, $J^\mu = J_{\text{lep}}^\mu + J_{\text{q}}^\mu$, que se puede separar en sus componentes leptónicas y quarkónicas,

$$J_{\text{lep}}^\rho = \nu_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5) e + \nu_\mu \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \mu + \nu_\tau \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \tau , \quad (5.2.2)$$

$$J_{\text{q}}^\rho = u \gamma_\rho (1 - \gamma_5) d' , \quad (5.2.3)$$

donde $d' = V_{ud}d + V_{us}s = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s$. El término $J_{\text{q}}^\mu J_{\text{q}}^\mu$ es subdominante respecto al resto, y por lo tanto lo podemos eliminar de nuestra formulación, si tan sólo estamos interesados en el primer orden significativo. Con lo cual, podemos escribir el lagrangiano de la forma

$$\delta\mathcal{L}_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(J_1^\mu J_\mu^1 + 2J_{\text{q}}^\mu J_\mu^1 \right) . \quad (5.2.4)$$

Nótese que G_F , llamado *constante de acoplamiento de Fermi* es proporcional a $1/M_w^2$. Concretamente, tenemos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_w^2} , \quad \text{donde } g \frac{e}{\sin\theta_w} . \quad (5.2.5)$$

Ejercicio 5.2.1 Demostrar la ecuación (5.2.5). Para hacerlo, ten en cuenta que la amplitud de probabilidad del lagrangiano de Fermi debe aproximarse al valor real, con correcciones de orden E/M_w ,

$$\begin{aligned} A_{EW} &= A_{F.C} + o\left(\frac{E}{M_w}\right), \\ &= +o\left(\frac{E}{M_w}\right) . \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

5.3. Desintegración del pión

5.3.1. Cálculo del elemento de matriz

Como hemos visto anteriormente, la desintegración del pión a un muón se efectúa, a nivel árbol, según el siguiente diagrama de quarks,

$$\pi^+ \left\{ \begin{array}{c} \bar{d} \\ v \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} W^+ \\ q \end{array} \quad \begin{array}{c} p \\ -k \\ \nu_\mu \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu^+ \end{array} . \quad (5.3.1)$$

Por lo tanto, del lagrangiano (5.2.4) tan sólo nos interesarán los términos que contienen muones y quarks. Así, pues, el corriente efectivo será de la forma

$$\delta\ell_\rho = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\nu_\mu\gamma_\rho(1-\gamma_5)\mu + \text{h.c.} \quad (5.3.2)$$

Con lo cual, el hamiltoniano efectivo para este proceso toma la forma

$$\delta H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c d\gamma^\rho(1-\gamma_5)u\nu \quad (5.3.3)$$

Este hamiltoniano es a nivel de piones, y no de quarks, por lo que el vértice pasa a ser puntual,

$$\cdot \quad (5.3.4)$$

El elemento de matriz del hamiltoniano para este proceso, por lo tanto, toma la forma

$$\mathcal{M} := \langle \mu^+\nu_\mu | H_{\text{eff}} | \pi^+ \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c \langle 0 | d\gamma^\rho(1-\gamma_5) | \pi^+(q) \rangle u(k)\gamma_\rho(1-\gamma_5)v(p) \quad (5.3.5)$$

Vamos a calcularlo paso a paso. En todo momento, sobreentenderemos que los campos se encuentran en el origen del espacio de posiciones. En primer lugar, dada la linealidad del producto de Hilbert, tenemos

$$\langle 0 | d\gamma^\rho(1-\gamma_5)u | \pi^+ \rangle = \langle 0 | d\gamma^\rho u | \pi^+ \rangle - \langle 0 | d\gamma^\rho \gamma_5 u | \pi^+ \rangle \quad (5.3.6)$$

El primer elemento de matriz del segundo miembro es nulo por paridad, ya que el pión tiene paridad negativa, mientras que la corriente vectorial tiene paridad positiva. Para verlo, utilizamos la propiedad del operador de paridad de ser su propio inverso, $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned} \langle 0 | d\gamma^\rho u | \pi^+ \rangle &= \langle 0 | \mathcal{P}\mathcal{P}d\gamma^\rho u\mathcal{P}\mathcal{P} | \pi^+ \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{P}d\gamma^\rho u\mathcal{P}(-1) | \pi^+ \rangle \\ &= \langle 0 | d\gamma^\rho u\mathcal{P}\mathcal{P}(-1) | \pi^+ \rangle \\ &= -\langle 0 | d\gamma^\rho u | \pi^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Nos disponemos ya a evaluar el segundo término. Usando factores de estructura, y teniendo en cuenta que el pión tiene spin cero, la única forma que puede tomar es

$$\langle 0 | d\gamma^\rho \gamma_5 u | \pi^+ \rangle = i\sqrt{2}f_\pi q^\rho, \quad (5.3.8)$$

donde f_π es una constante (con dimensiones de energía), que se ha medido experimentalmente. Su valor aceptado es $f_\pi = (92,4 \pm 0,2)\text{MeV}$.

Juntando todos los resultados obtenidos, el elemento de matriz que nos da la teoría efectiva es

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c \left(-i\sqrt{2}f_\pi q^\rho \right) u(k)\gamma_\rho(1-\gamma_5)v(p) \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c \left(-i\sqrt{2}f_\pi \right) (\not{k} + \not{p})u(k)(1-\gamma_5)v(p), \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

donde hemos tenido en cuenta que $q^\rho = p^\rho + k^\rho$, tal y como se puede ver en el diagrama (5.3.1). Llegados a este punto, debemos tener en cuenta que los fermiones cumplen la ecuación de Dirac. Además, podemos realizar la aproximación de que los neutrinos no tienen masa². Por lo tanto, tenemos,

$$u(k)\not{k} = 0, \quad (5.3.10)$$

$$\not{p}v(p) = -m_\mu v(p). \quad (5.3.11)$$

² Actualmente, existen experimentos que parecen demostrar que la masa de los neutrinos no es nula, aunque muy pequeña. Sin embargo, para nuestros propósitos nos es suficiente considerar la aproximación de neutrinos sin masa.

Introduciendo estas igualdades en la expresión del elemento de matriz tenemos

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_c i \sqrt{2} f_\pi u(k) (1 + \gamma_5) m_\mu v(p) . \quad (5.3.12)$$

La amplitud de probabilidad de este proceso vendrá dada por el cuadrado (del módulo) del elemento de matriz \mathcal{M} . Para calcular el cuadrado, en primer lugar debemos tener una expresión explícita para \mathcal{M}^\dagger , que se puede obtener trivialmente teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} (u(1 + \gamma) v)^\dagger &= (u^\dagger \gamma_0 (1 + \gamma_5) v)^\dagger \\ &= v^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma^0 u \\ &= v(1 - \gamma_5) u . \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Por otra parte, para obtener la sección eficaz también será necesario sumar sobre todos los estados finales de helicidad. Con lo cual, utilizando en truco de Casimir para convertir las sumas en trazas, tenemos

$$|\mathcal{M}|^2 = G_F^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^2 m_\mu \text{tr} \left[(\not{p} - m_\mu)(1 + \gamma_5) \not{k} (1 - \gamma_5) \right] . \quad (5.3.14)$$

El cálculo de las trazas es sencillo,

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[(\not{p} - m_\mu)(1 + \gamma_5) \not{k} (1 - \gamma_5) \right] &= 2 \text{tr} \left[(\not{p} - m_\mu)(1 + \gamma_5) \not{k} \right] \\ &= 2 \text{tr} \not{p} \not{k} = 8 p \cdot k , \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

con lo cual, el resultado final para $|\mathcal{M}|^2$ es

$$|\mathcal{M}|^2 = 8 G_F^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^2 m_\mu p \cdot k . \quad (5.3.16)$$

para continuar con nuestro tratamiento, debemos especificar la cinemática del choque para evaluar el producto $p \cdot k$. En el sistema centro de masas, el pión inicial está en reposo; y, además, el muón y el pión salen despedidos con igual momento en direcciones contrarias,

$$\begin{array}{ccc} \mu^+ & \pi^+ & \nu_\mu \\ \mathbf{p}_\mu & \mathbf{E}_\nu & \end{array} . \quad (5.3.17)$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} p \cdot k &= E_\mu E_\nu - \mathbf{E}_\nu \mathbf{p}_\mu \\ &= E_\nu (E_\mu + |\mathbf{p}_\mu|) . \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Por conservación del trimomento tendremos que el módulo del trimomento de muón será igual al módulo del trimomento del neutrino y, por lo tanto, igual a su energía, $|\mathbf{p}_\mu| = E_\nu$.

5.3.2. Longitud de desintegración

Para comparar los resultados de la teoría con los experimentales, necesitamos calcular la longitud de desintegración; que en el centro de masas, se escribe (en forma diferencial) tal que así [6]

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\pi} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_\mu} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_\nu} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) . \quad (5.3.19)$$

Gracias a la delta de Dirac de conservación, las integrales vectoriales son triviales. Su resultado es

$$\begin{aligned} \Gamma &= \cos^2 \theta_c \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_\mu^2}{(2\pi)^2 m_\pi^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{k}}{E_\mu E_\nu} \delta(m_\pi - E_\nu - E_\mu) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) E_\nu (E_\mu + E_\nu) \\ &= \cos^2 \theta_c \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_\mu^2}{\pi m_\pi^2} \int dE_\nu E_\nu^2 \left(1 + \frac{E_\nu}{\sqrt{m_\mu^2 + E_\nu^2}} \right) \delta(m_\pi - E_\nu - E_\mu) \\ &= \cos^2 \theta_c \frac{G_F}{4\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\nu^2} \right)^2 . \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

El inverso de la longitud de desintegración es la vida media, $\tau = 1/\Gamma$. Experimentalmente, el valor medido es $\tau = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{s}$.

5.3.3. Comparación entre canales de desintegración

Todo el proceso que hemos realizado para el canal de desintegración del pión en un muón es igualmente válido para el canal en que el pión se desintegra en un positrón. En este contexto, pues, es interesante comparar las amplitudes de ambos canales,

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \cdot \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2. \quad (5.3.21)$$

Substituyendo los valores de las masas, obtenemos que el cociente debe valer $1,2 \cdot 10^{-4}$. Esta estimación es muy buena, ya que el valor que se ha logrado medir experimentalmente es $1,230 \cdot 10^{-4}$. Sin embargo, dado que el electrón es mucho menos masivo, la integración respecto E_e se lleva a cabo en un espacio fásico mucho mayor que la correspondiente al muón. Así, pues, resulta sorprendente que el canal mayoritario sea el muónico; debe haber algún motivo dinámico que lo explique.

El motivo radica en la conservación de la helicidad (ver, por ejemplo [13]). Para razonarlo, nos será más cómodo considerar la desintegración de un π^- . El cálculo que hemos hecho es completamente análogo al caso de un pión negativo, por lo que nos encontramos con el mismo problema en la integración.

En la desintegración de un pión negativo, por el canal del electrón, se emite un antineutrino electrónico, con momento contrario al del electrón,

$$\begin{array}{ccc} e^- & \pi^- & \nu_e \\ & \mathbf{s}_e & \mathbf{s}_\nu \end{array}. \quad (5.3.22)$$

Los antineutrinos siempre tienen helicidad positiva, por lo que su spin se dirige en la misma dirección del momento. Por conservación, dado que el pión no tiene spin, el spin del electrón ha de ser el contrario, es decir, también con helicidad positiva. Sin embargo, en el límite en que la masa del electrón es nula, $m_e = 0$, el vértice de interacción tan sólo es consistente con electrones salientes de helicidad negativa (electrones de «la mano izquierda»).

La única forma en que podemos mezclar electrones de helicidad positiva es mediante el término de masas,

$$\delta\mathcal{L} \sim m_e (\psi_R \psi_L + \psi_L \psi_R), \quad (5.3.23)$$

por lo que esta interacción vendrá suprimida por la masa del electrón, m_e , que es mucho más ligero que el muón. Este es el motivo de que, pese a tener menor espacio fásico, el canal muónico salga favorecido.

5.4. Teoría de Fermi–Cabbibo

5.4.1. Lagrangiano de Fermi–Cabbibo

La teoría de Fermi–Cabbibo es una buena aproximación para estudiar las interacción nuclear débil entre leptones. Su lagrangiano se escribe de la forma

$$\mathcal{L} = \sum_\ell \bar{\psi}_\ell i \not{\partial} \psi_\ell + \sum_\ell \bar{\nu}_\ell i \not{\partial} \nu_\ell - \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{\text{lep.}}^\rho J_\rho^{\text{lep.}}, \quad (5.4.1)$$

donde $J_{\text{lep.}}^\mu$ es la parte leptónica del corriente de Noether, que recordemos se expresa tal que

$$J_{\text{lep.}}^\rho = \nu_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5) e + \nu_\mu \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \mu + \nu_\tau \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \tau. \quad (5.4.2)$$

Así, pues, en este caso tendremos un vértice de interacción local de cuatro campos.

5.4.2. Desintegración del muón

Para concluir este curso, vamos a considerar la desintegración del muón, empleando la teoría efectiva de Fermi–Cabbibo. El canal que vamos a considerar es

$$\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu. \quad (5.4.3)$$

En general, este proceso se lleva a cabo a través de la corriente cargada W^- , que es emitida por el muón en convertirse en un neutrino (muónico). La partícula W^- se desintegra en un electrón y un antineutrino (electrónico). El diagrama de Feynman es el siguiente,

$$\begin{array}{c}
 \nu_\mu(k) \\
 \mu^-(p) \\
 W^-(p-k) \quad e^-(p') \\
 \bar{\nu}_e(k')
 \end{array} \tag{5.4.4}$$

En esta situación, el elemento de matriz es de la forma

$$\mathcal{M} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right) \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) v(k') \right) . \tag{5.4.5}$$

Este es el resultado que se obtiene del modelo estándar. No obstante, nosotros nos situamos en el límite de bajas energías, en que es válida la aproximación de interacción puntual, y por lo tanto no es necesario considerar la aparición de la partícula W^- . Así, pues, el diagrama que nosotros consideramos es

$$\begin{array}{c}
 \nu_\mu(k) \\
 \mu^-(p) \\
 e^-(p') \\
 \bar{\nu}_e(k')
 \end{array} \tag{5.4.6}$$

El elemento de matriz invariante para este proceso es

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(k) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u(p)] \cdot [\bar{u}(p') \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(k')] . \tag{5.4.7}$$

Para calcular el cuadrado del módulo, en este caso es necesario realizar un promedio sobre los valores de los spines. El resultado que se obtiene, tras aplicar el truco de Casimir y realizar el cálculo de las trazas, es el siguiente

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64 G_F^2 (k \cdot p') (k' \cdot p) . \tag{5.4.8}$$

Dado que la masa del electrón es muy pequeña, podemos tomar el límite $m_\mu \gg m_e \rightarrow 0$. Ahora, los productos escalares se pueden evaluar de forma sencilla en el sistema centro de masas,

$$\begin{aligned}
 (k \cdot p') (k' \cdot p) &= (p - k')^2 (k' \cdot p) \\
 &= (m^2 - 2mw') mW' ,
 \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

donde hemos tenido en cuenta que el muón está en reposo, $p_\mu = (m_\mu, \vec{0})$; y hemos definido $W' = E(k')$.

En este caso, la dinámica de la interacción es del tipo $1 \rightarrow 3$, donde la longitud de desintegración se obtiene a partir de

$$d\Gamma = \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\mathcal{Q} , \tag{5.4.10}$$

donde $d\mathcal{Q}$ es el elemento de espacio fásico, y se escribe de la forma

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{Q} &= \frac{d^2 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^2 k}{(2\pi)^3 2W} \frac{d^2 k'}{(2\pi)^3 2W'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k - k') \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2W'} \theta(E - E' - W') \delta((p - p' - k')^2) .
 \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

Así, pues, recogiendo todos los resultados, obtenemos

$$d\Gamma = \frac{1}{2m\pi^5} \frac{d^3p'}{2E'} \frac{d^3k'}{2W'} mW' (m^2 - 2mW') \delta(m^2 - 2mE' - 2mW' + 2EW'(1 - \cos\theta)) , \quad (5.4.12)$$

donde θ es el ángulo que forman las trayectorias salientes del electrón y el antineutrino electrónico. Por fin podemos realizar la integración. Los elementos de interacción se pueden reescribir de la guisa

$$d^3p' d^3k' = 4\pi E'^2 dE' 2\pi W'^2 dW' d(\cos\theta) , \quad (5.4.13)$$

con lo cual nos queda

$$d\Gamma = \frac{1}{2\pi^3} dE' dW' mW' (m - 2W') \theta\left(\frac{m}{2}, W'\right) \theta\left(W' - \left(\frac{m}{2} - E'\right)\right) \theta\left(\frac{m}{2} - E'\right) \theta(E') . \quad (5.4.14)$$

En esta expresión, las funciones paso de Heaviside nos dan el límite en que el momento de una de las partículas sería cero, por lo que el proceso se convertiría al tipo $1 \rightarrow 2$, y los momentos salientes estarían fijados por la cinemática.

Dado que experimentalmente es muy difícil medir la energía de los neutrinos, nos conviene integrarla,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE'} &= \frac{m}{2\pi^3} \int_{\frac{m}{2}-E'}^{\frac{m}{2}} dW' W' (m - 2W') \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} m^2 E'^2 \left(3 - \frac{4E'}{m}\right) . \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Finalmente, si deseamos obtener la vida media del muón, necesitamos integrar sobre la energía del electrón para obtener la longitud de desintegración total. El resultado se puede obtener trivialmente,

$$\Gamma = \int_0^{\frac{m}{2}} dE' \frac{d\Gamma}{dE'} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} . \quad (5.4.16)$$

Experimentalmente, se mide que la vida media del muón es $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Podemos usar la ecuación (5.4.16) para medir la constante de acoplamiento del lagrangiano de Fermi–Cabbibo. El resultado que se obtiene es, finalmente

$$G_F = 1,16632 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-1} . \quad (5.4.17)$$

5.4.3. Desintegración de muones polarizados. Violación de paridad

En el apartado anterior hemos considerado un haz de muones no polarizados. Esto se refleja en que hemos tomado el promedio sobre los spines. No obstante, en el laboratorio podemos obtener un haz polarizado. En este caso, en calcular el elemento de matriz deberíamos tomar la suma de las polarizaciones de las partículas finales, tan solo. Este experimento es útil para ver como las interacciones débiles violan paridad.

En la figura 5.1(a) podemos ver la disposición de los haces original. La polarización del muón (flecha vertical) y la trayectoria del electrón saliente forman un ángulo θ . Después de aplicar la transformación de paridad, figura 5.1(b), la polarización del muón no cambia, dado que el spin no es más que un momento angular y, por tanto, invariante bajo paridad. Sin embargo, ahora los electrones salen en la dirección diametralmente opuesta, formando un ángulo $\theta_s = \pi - \theta$. Por lo tanto, experimentalmente realizar una transformación de paridad es muy sencillo: tan sólo tenemos que girar el detector.

Es de suponer que el elemento de matriz en este caso dependerá de alguna función trigonométrica del ángulo θ . Estas funciones transforman de la siguiente manera bajo paridad,

$$\cos\theta \longrightarrow \sin\theta_s = \sin\theta , \quad (5.4.18a)$$

$$\cos\theta \longrightarrow \cos\theta_s = -\cos\theta . \quad (5.4.18b)$$

Por lo tanto, si el elemento de matriz tan sólo depende del seno, tendremos invariancia bajo paridad. Sin embargo, una dependencia del elemento de matriz con el coseno de θ rompería la simetría bajo paridad.

Si se realiza el cálculo detallado, el resultado que se obtiene es [13]

$$\frac{d\Gamma}{dE_e d(\cos\theta)} = \frac{1}{(8\pi)^3} \frac{1}{3} G_F^2 m_\mu^2 E_e \left(3 + \cos\theta - \frac{4E_e}{m_\mu} (1 + \cos\theta)\right) . \quad (5.4.19)$$

Como vemos, este resultado depende del coseno del ángulo entre la polarización del muón y la trayectoria de los electrones. Por lo tanto, se viola la simetría de paridad. La interacción nuclear débil es la única interacción de la naturaleza capaz de violar la simetría de paridad.

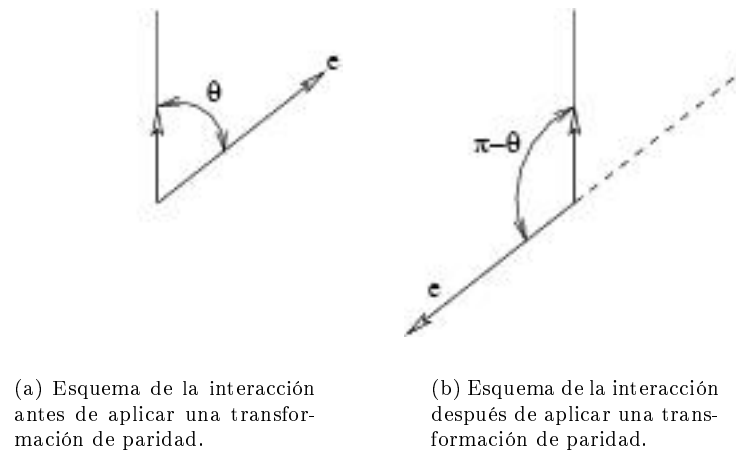


Figura 5.1: Transformación de paridad sobre el proceso de desintegración de un haz de muones polarizados verticalmente.

Bibliografia

- [1] T. P. D. GROUP. *The review of particle physics*. página web: <http://pdg.lbl.gov>.
- [2] J. F. CORNWELL. *Group theory in physics*. Academic Press (1984-1989). 3 vols.
- [3] H. GEORGI. *Lie algebra in particle physics*. Benjamin-Cumming (1982).
- [4] J. LLOSA Y A. MOLINA. *Relativitat especial i electrodinàmica clàssica*. Edicions UB, segunda edició (1999).
- [5] J. D. JACKSON. *Classical electrodynamics*. Wiley, tercera edició (1999).
- [6] SAKURAI. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub Co (1994).
- [7] L. H. RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University press (1996).
- [8] P. PASCUAL Y R. TARRACH. *QCD: renormalization for the practitioner*. Springer (1984).
- [9] S. J. P. MCNAMEE Y F. CHILTON. *Tables of clebsch-gordan coefficients of $su(3)$* . *Rev. Mod. Phys.*, 36(1964):1005.
- [10] C. CALLAN, J. WESS, Y B. ZUMINO. *Structure of phenomenological lagrangians.i*. *Phys. Rev.*, (1969):2239.
- [11] C. CALLAN, S. COLEMAN, J. WESS, Y B. ZUMINO. *Structure of phenomenological lagrangians.ii*. *Phys. Rev.*, (1969):2247.
- [12] M. E. PESKIN Y D. V. SCHROEDER. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press (1995).
- [13] W. GREINER Y B. MULLER. *Gauge theory of weak interactions*. Springer, cop., segunda edició (1996).
- [14] F. J. YNDURÁIN. *Quantum chromodynamics : an introduction to the theory of quarks and gluons*. Springer, cop. (1983).
- [15] W. GREINER, S. SCHRAMM, Y S. ECKART. *Quantum chromodynamics*. Springer, segunda edició (2002).
- [16] H. GEORGI. *Weak Interactions and Modern Particle Theory*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, inc. (1984).
- [17] S. TITARD Y F. J. YNDURÁIN. *Rigorous qcd evaluation of spectrum and ground state properties of heavy $q\bar{q}$ -bar systems, with a precision determination of m_b , $m(\eta_b)$* . *Phys. Rev. D*, 49(1994):6007.
- [18] *Lectures in particle phenomenology given at carnegie mellon university*. página web: http://www.phys.washington.edu/~savage/class_cmu/part_cmu/phen_cmu.html (1993-1995).
- [19] F. HALZEN Y A. D. MARTIN. *Quarks and leptons : an introductory course in modern particle physics*. Wiley, cop. (1984).
- [20] D. PERKINS. *Introduction to high-energy physics*. Addison Wesley (1987).
- [21] T. FERBEL. *Experimental techniques in high-energy, nuclear and particle physics*. Word Scientific (1991).

- [22] J. DONOGHUE, A. MARTIN, Y B. HOLDSTEIN. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge U.P. (1992).
- [23] L. B. OKUN. *Leptons and quarks*. North-Holland (1982).
- [24] C. QUIGG. *Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions*. Benjamin-Cumming (1983).
- [25] T. CHENG Y L. LI. *Gauge theories of elementary particle physics*. Oxford U. P. (1988).
- [26] G. STERMAN. *Quantum Field Theory*. Cambridge U. P (1993).
- [27] E. COMMINS Y P. BUCKSBAUM. *Weak interactions of leptons and quarks*. Cambridge U. P. (1983).