

Teoría cuántica de campos

pod

Octubre - diciembre 2003

Índice general

Índice general	III
Prólogo	V
1. Introducción	1
1.1. Repaso de mecánica hamiltoniana	1
1.2. Postulados de la mecánica cuántica	2
1.3. Cuantización canónica de la teoría no relativista. Ecuación de Schödinger	3
1.4. Cuantización canónica de la teoría relativista. Ecuación de Klein-Gordon	4
1.5. Causalidad	5
2. Teoría clásica de campos	7
2.1. Derivadas funcionales	7
2.2. Formalismo lagrangiano	8
2.3. Formalismo hamiltoniano	9
2.4. Teorema de Noether	10
2.4.1. Enunciado y demostración	10
2.4.2. Ejemplos de aplicación del teorema de Noether	12
2.4.3. Obtención de la simetría a partir de las cargas	14
3. Cuantización del campo escalar real de Klein-Gordon	15
3.1. Imágenes de la mecánica cuántica. Imagen de Schödinger y de Heisemberg	15
3.2. Cuantización del campo escalar de Klein-Gordon real	16
3.2.1. Operadores de creación y destrucción	16
3.2.2. Normalización invariante Lorentz	19
3.2.3. El campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo	20
3.3. Propagadores de Klein-Gordon	21
3.3.1. Microcausalidad	21
3.3.2. Propagador retardado	22
3.3.3. Propagador de Feynman	23
4. Teorías con interacción	25
4.1. Interacción con una fuente clásica	25
4.2. Interacción de campos	26
4.2.1. Introducción	26
4.2.2. Imagen de interacción	27
4.3. Correladores. Ecuación de Gell-Mann–Low	29
4.4. Teorema de Wick	30
4.4.1. Enunciado y ejemplos	30
4.4.2. Demostración del teorema de Wick	32
4.5. Representación diagramática y teoría de perturbaciones	33
4.6. Las reglas de Feynman	34

4.6.1.	Reglas de Feynman en espacio de posiciones	34
4.6.2.	Reglas de Feynman en espacio de momentos	35
4.6.3.	Diagramas desconectados de puntos externos	37
4.6.4.	Energía del vacío	39
4.7.	Representación espectral de Källen–Lehmann	39
4.8.	Matriz S	42
4.8.1.	Definición	42
4.8.2.	Cálculo hasta primer orden	44
4.8.3.	Diagramas conectados y amputados	46
4.9.	Fórmula de reducción LSZ	47
4.9.1.	Deducción analítica	47
4.9.2.	LSZ con diagramas de Feynman	49
4.9.3.	Diagramas irreductibles de una partícula y autoenergía	50
4.9.4.	Cálculo de la matriz S	51

Bibliografía

53

Prólogo

El propósito de este documento es proporcionar una introducción a la Teoría Cuántica de Campos a personas con conocimiento medio de los conceptos de la Mecánica Cuántica, de las formulaciones de Lagrange y Hamilton de la mecánica clásica y de Relatividad Especial. Por este motivo, cualquier estudiante de segundo ciclo avanzado debería ser capaz de comprender los conceptos explicados.

La primera versión, publicada en Canal#física el 7 de febrero de 2004, contiene cuatro capítulos: «Introducción», «teoría clásica de campos», «cuantización del campo escalar real de Klein–Gordon» y «teorías con introducción». En el futuro, se planea ampliar el temario incluyendo nuevos temas, como renormalización, cuantización de teorías gauge, electrodinámica cuántica, cromodinámica cuántica, teorías electrodébiles, modelo estándar, etc.

Los primeros cuatro capítulos se han basado principalmente en el curso «Teoría Cuántica de Campos» del programa de doctorado de «Física Avanzada» que imparte la «Facultat de Física» de la «Universitat de Barcelona». Concretamente, el documento actual cubre cuatro de los cinco temas que se impartieron en dicho curso en el año 2003–2004, por el profesor Enric Verdaguer. También hay trozos del presente libro que han sido extraídos de la asignatura «Física de Altas Energías», impartida por José Ignacio Latorre en el curso 2002–2003, correspondiente a la Licenciatura en Física de la misma facultad.

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo examinaremos cuales son los principales motivos por los que la mecánica cuántica no es compatible con la relatividad especial. Con este objetivo, examinaremos el proceso de cuantización canónica que da a lugar la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica no relativista, y posteriormente veremos que este mismo proceso, aplicado a una teoría relativista, lleva a contradicciones lógicas. En concreto, estudiaremos el problema de las probabilidades negativas, la aparición de energías negativas y los problemas con la causalidad.

1.1. Repaso de mecánica hamiltoniana

En la mecánica clásica, un sistema dinámico descrito mediante las variables canónicas $\{\mathbf{q}\}$, con momentos conjugados $\{\mathbf{p}\}$, viene caracterizado por la función de Hamilton (o hamiltoniana), que bajo unas condiciones muy generales, se puede identificar con la energía, separada en un término de cinético y un cierto potencial $V(\mathbf{q})$ que depende únicamente de la posición,¹

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) . \quad (1.1.1)$$

La trayectoria del sistema en el espacio de fases viene dada por las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (1.1.2)$$

Gran parte de las propiedades dinámicas del sistema vienen descritas por el paréntesis de Poisson, que para dos funciones f y g en el espacio de fases del sistema se define de la forma

$$\{f, g\}_{\text{PB}} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] . \quad (1.1.3)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton, podemos escribir la variación temporal de cualquier función dinámica a partir de su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano,

$$\frac{d}{dt}f = \{f, H\}_{\text{PB}} . \quad (1.1.4)$$

En términos de los paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton se escriben de la forma siguiente,

$$\frac{d}{dt}q = \{q, H\}_{\text{PB}} , \quad \frac{d}{dt}p = \{p, H\}_{\text{PB}} . \quad (1.1.5)$$

¹En este capítulo consideraremos que tanto el Hamiltoniano como todas las funciones dinámicas no dependen del tiempo de forma explícita.

1.2. Postulados de la mecánica cuántica

En mecánica cuántica, el estado del sistema viene caracterizado mediante un vector $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert sobre los complejos. Generalmente, a dicho vector se le suele llamar *ket de estado*. El dual de este *ket*, que denotamos por $\langle\psi|$, recibe el nombre de *bra de estado*. De esta forma, la contracción dual de un *bra* y un *ket* definen de forma natural el producto de Hilbert, $\langle\phi|\psi\rangle$, o *braket*². Tan solo consideraremos estados normalizados, es decir, tales que $\langle\phi|\phi\rangle = 1$.

Otro de los principales postulados de la mecánica cuántica expresa que la probabilidad de que un sistema que ha sido preparado en un estado $|\phi\rangle$ se encuentre en otro estado $|\psi\rangle$ es igual a $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Esto nos permite asociar $\psi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{X}|\psi\rangle$ con la función de onda de la mecánica ondulatoria, ya que $|\psi(\mathbf{x})|^2$ es la probabilidad de encontrar la partícula en \mathbf{x} (es decir, de encontrarla en el estado $|\mathbf{x}\rangle$).

El resultado de una medida no es determinista, sino que viene determinado por una determinada densidad de probabilidad, que se puede obtener mediante el ket de estado del sistema $|\psi(t)\rangle$. Además, el resultado de una medida puede ser afectar al estado del sistema, fenómeno que se conoce como *colapso de la función de onda*. En el formalismo algebraico, las entidades capaces de modificar un vector (ket) son los operadores, \hat{O} . Por lo tanto, podemos asociar los diferentes operadores con el proceso de medida de alguna magnitud física. Estos operadores se llaman *observables* y, como veremos más adelante, deben ser hermiticos, $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$.

El estado del sistema después de la medida del observable \hat{O} viene dado por el ket

$$|\psi'\rangle = \hat{O} |\psi\rangle . \quad (1.2.1)$$

En el caso de que el nuevo estado sea proporcional al anterior,

$$\hat{O} |\psi\rangle = o |\psi\rangle , \quad (1.2.2)$$

diremos que el estado $|\psi\rangle$ es un *estado propio* de \hat{O} , con *valor propio* asociado o . Se puede demostrar, ver por ejemplo [4], que el conjunto de todos los estados propios, $|n\rangle$, de un operador dado, \hat{O} , forman un conjunto completo, es decir,

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n| , \quad \hat{O} = \sum_n o_n |n\rangle\langle n| , \quad (1.2.3)$$

en los casos de espectro continuo, la suma se reemplaza por una integral. Por ejemplo, para los operadores de posición y momento tenemos

$$1 = \int d^3\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| , \quad \mathbf{X} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| , \quad (1.2.4)$$

$$1 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| , \quad \mathbf{P} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| . \quad (1.2.5)$$

El *postulado de la medida* afirma que el resultado de una medida de un cierto observable \hat{O} tan sólo puede ser un valor propio de este operador. Además, la probabilidad de que el resultado de la medida sobre un sistema en el estado $|\psi\rangle$ sea el valor propio o_n viene dada por

$$P_{|\psi\rangle}(O = o_n) = |\langle o_n|\psi\rangle|^2 . \quad (1.2.6)$$

Dado que tan solo tiene sentido la medición de cantidades reales, debemos asegurarnos de que los valores propios lo son. La forma más habitual de hacerlo es suponiendo que los observables han de ser hermiticos, $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$, donde el operador \hat{O}^\dagger se define de la siguiente guisa

$$\langle\phi|\hat{O}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}^\dagger|\phi\rangle^* . \quad (1.2.7)$$

Además, el *postulado del colapso del estado* asegura que, después de la medida, el estado del sistema cambiará y pasará a ser la componente de $|\psi\rangle$ que es paralela al estado propio con valor propio o_n ,

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{O} \rightarrow o_n} |o_n\rangle . \quad (1.2.8)$$

²Esta terminología, debida a Dirac, proviene del inglés «braket» (paréntesis), $\langle\phi|\psi\rangle$, que se divide en «bra», $\langle\phi|$, y «ket», $|\psi\rangle$. A Dirac le gustó esta división, en especial por el doble significado de la palabra «bra» en inglés.

En el caso de espectros degenerados, en que hay diversos estados que tienen el mismo valor propio bajo \hat{O} , por ejemplo $|\alpha, o_n\rangle$, el colapso se hace manteniendo el peso relativo entre estos estados,

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{O} \rightarrow o_n} \frac{\sum_{\alpha} |\alpha, o_n\rangle \langle \alpha, o_n | \psi \rangle}{\sqrt{\sum_{\beta} |\langle \beta, o_n | \psi \rangle|^2}} , \quad (1.2.9)$$

Obsérvese que, de hecho, esta expresión corresponde a hacer actuar el proyector al subespacio $\hat{O} = o_n$ sobre el estado original. El denominador se introduce con tal de mantener la normalización a la unidad.

Para acabar este repaso de la mecánica cuántica, enunciaremos el principio de incertidumbre, que a este nivel se introduce como teorema. Definimos la incertidumbre en la medida de un observable sobre un estado como el valor esperado

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{O})^2 &= \langle \psi | (\hat{O} - O)^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{O}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle^2 , \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

donde $O = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$. El teorema de incertidumbre asegura que, dados dos observables \hat{A} y \hat{B} , se cumple la desigualdad

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|^2 . \quad (1.2.11)$$

La demostración formal puede encontrarse, por ejemplo, en [4]. El caso más conocido es el de los operadores de posición y momento, cuya relación de conmutación es $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\delta_{ij}$; por lo tanto tenemos

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \frac{1}{2} . \quad (1.2.12)$$

1.3. Cuantización canónica de la teoría no relativista. Ecuación de Schrödinger

El proceso de cuantización canónica consiste en promover las variables dinámicas a operadores sobre el espacio de Hilbert, \hat{Q}_i y \hat{P}_i , y promover el paréntesis de Poisson a el conmutador de ambos operadores, dividido por $i\hbar$, es decir,

$$[\hat{O}, \hat{G}] \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} \{o, g\}_{\text{PB}} , \quad \text{donde} \quad [\hat{O}, \hat{G}] := \hat{O}\hat{G} - \hat{G}\hat{O} , \quad (1.3.1)$$

donde \hbar es la constante, reducida por 2π , de Planck. A menudo consideramos un sistema de unidades natural tal que $\hbar = c = 1$, con lo que habitualmente no escribiremos explícitamente la constante de Planck y la velocidad de la luz. Si en cualquier momento es necesario reconstruir la dependencia en \hbar o en c , por ejemplo para tomar el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$, debemos añadir tantos factores \hbar y c como sean necesarios con tal de que las dimensiones de todas las ecuaciones sean homogéneas.

En caso de que no exista confusión posible, no escribiremos el acento circunflejo encima de los operadores. En cambio, utilizaremos letras mayúsculas para representar operadores, y minúsculas para las cantidades complejas (tales como los valores propios), a menos que se especifique lo contrario.

Dado que $\{q_i, p_j\}_{\text{PB}} = \delta_{ij}$, las variables canónicas conjugadas se definen de la forma

$$[\hat{Q}_i, \hat{P}_j] = i\delta_{ij} . \quad (1.3.2)$$

En la descripción cuántica de partículas, usualmente se utilizan como variables las coordenadas cartesianas de posición, $\hat{Q}_i = \hat{X}_i$. En este caso, el espacio de Hilbert es el espacio (de dimensión infinita) de las funciones complejas en el espacio tridimensional, tales que su módulo al cuadrado es integrable. En este caso, la

representación operacional del momento canónico y de la energía (hamiltoniano) son³

$$H \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t} , \quad P_i \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial X_i} . \quad (1.3.3)$$

Si consideramos partículas no relativistas, el hamiltoniano clásico es de la forma (1.1.1), por lo que la versión promovida a operadores en mecánica cuántica, aplicada al ket de estado del sistema, será

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[-\frac{P^2}{2m} + V(X) \right] |\psi(t)\rangle , \quad (1.3.4)$$

ésta no es más que la ecuación de Schödinger del sistema, que dado el estado del sistema en un instante $t = t_0$ permite determinar exactamente el estado en cualquier otro instante de tiempo. En termino de la función de onda $\psi(x) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$,⁴ la ecuación de Schödinger se expresa de la forma

$$-i \frac{d}{dt} \psi(x) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x) . \quad (1.3.5)$$

Esta expresión se obtiene multiplicando por la derecha por el bra $\langle \mathbf{x} |$, y teniendo en cuenta que, según la asociación (1.3.3), tenemos

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{P} | \psi(t) \rangle \longrightarrow -i \nabla \psi(x) , \quad \langle \mathbf{x} | H | \psi(t) \rangle \longrightarrow i \frac{d}{dt} \psi(x) . \quad (1.3.6)$$

La interpretación de $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ como densidad de probabilidad se basa en el hecho de que se puede escribir una *ecuación de continuidad*,

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{donde} \quad \mathbf{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) , \quad (1.3.7)$$

que se verificará siempre que la función de onda sea solución de la ecuación de Schödinger en la representación de posiciones, eq. (1.3.5). La interpretación de esta ecuación es similar a la análoga en el electromagnetismo: si la probabilidad de encontrar la partícula en cierta región varía se debe a que ha existido un flujo neto de probabilidad por la frontera de dicha región. Así, pues, la ecuación de continuidad es necesaria para garantizar que la probabilidad total se conserve. El vector \mathbf{j} se denomina *corriente de probabilidad*.

1.4. Cuantización canónica de la teoría relativista. Ecuación de Klein-Gordon

Dado que estamos en una teoría relativista, será conveniente adoptar la notación de cuadvectores totalmente. Tomaremos como métrica del espacio tiempo la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Además, adoptaremos el criterio de suma de Einstein, según el cuál para todos los índices repetidos, una vez como superíndices y otra como subíndices, se sobreentenderá una suma sobre todos sus posibles valores. Además, tomaremos el criterio de que todos los índices representados mediante letras griegas toman valores entre 0 y 3 (espacio y tiempo), mientras que las letras latinas tan sólo toman valores entre 1 y 3 (espacio).

En relatividad especial la relación entre el momento y la energía de una partícula libre viene dada por

$$E^2 = m^2 + p^2 . \quad (1.4.1)$$

Siguiendo el mismo proceso que en el apartado anterior, podemos obtener una teoría cuántica de una partícula relativista, cuya función de onda $\phi(x)$ deberá cumplir la ecuación de *Klein-Gordon*,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \nabla^2 \right) \phi(x) = m^2 \phi(x) . \quad (1.4.2)$$

³La justificación de esta elección, a este nivel, reside en el hecho de que esta representación es la más sencilla que cumple las relaciones de conmutación, $[X_i, P_j] = i\delta_{ij}$ y $[O, H] = i\frac{d}{dt}O$.

⁴A lo largo del documento utilizaremos la notación $x = (t, \mathbf{x})$ para representar el cuadvector de posición en el espacio-tiempo.

En notación covariante, tenemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0 . \quad (1.4.3)$$

En este caso, para obtener una ecuación de continuidad del estilo de (1.3.7) es necesario definir una nueva densidad de probabilidad y corriente de probabilidad, que se pueden expresar como un único cuádrivector $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, donde

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) . \quad (1.4.4)$$

En términos de el cuádrivector j^μ la ecuación de continuidad toma la forma

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (1.4.5)$$

Sin embargo, podemos observar que la densidad de probabilidad, $\rho = j^0$, no está definida positiva. Dado que no tiene sentido el hecho de que una probabilidad sea negativa, la ecuación de Klein-Gordon no tiene una interpretación probabilística similar a la que tenía la de Schrödinger.

De hecho, el propio Schrödinger encontró la ecuación relativista antes de publicar su ecuación no relativista, sin embargo, el hecho de que no tendría interpretación probabilística le hizo desestimarla en un primer momento.

Para comprender de forma más profunda la causa de este comportamiento, vamos a obtener las soluciones clásicas de la ecuación de Klein-Gordon,

$$\phi_\pm(x) = e^{-i(\pm Et - \mathbf{p}\mathbf{x})} . \quad (1.4.6)$$

La solución ϕ_+ se puede interpretar como una partícula de energía $E > 0$. La solución ϕ_- , sin embargo, se puede interpretar como una partícula con energía negativa, o bien como una partícula con energía positiva que viaja hacia atrás en el tiempo.

Además, mediante simple sustitución, podemos ver que la solución ϕ_+ es tal que $j^0 > 0$, mientras que para ϕ_- siempre tenemos $j^0 < 0$. Una posibilidad para seguir adelante podría ser ignorar la solución ϕ_- . Sin embargo, esto no es satisfactorio, por lo que debemos buscar una teoría más general.

Dado que $\phi(x)$ no tiene una interpretación probabilística, no podemos considerar como la función de onda de la mecánica ondulatoria. Diremos, pues, que es un *campo*; en este caso, el campo de Klein-Gordon. En la teoría cuántica de campos, la solución ϕ_- se interpreta como la antipartícula asociada a la partícula ϕ_+ .

1.5. Causalidad

Consideremos la amplitud de probabilidad de que una partícula pase de un punto \mathbf{x} a otro \mathbf{y} en un tiempo dado t ,

$$\langle \mathbf{y}, t | U(t, 0) | \mathbf{x}, 0 \rangle , \quad (1.5.1)$$

donde $U(t, 0)$ es un operador unitario que implementa la evolución del estado según la ecuación de Schrödinger. Dado que la norma del estado (la raíz cuadrada del producto de Hilbert consigo mismo) siempre ha de ser igual a la unidad, el operador U ha de ser unitario, $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$. La expresión concreta de $U(t, 0)$ se puede obtener en términos del Hamiltoniano (ver por ejemplo [4]), y para hamiltonianos que no dependen del tiempo es

$$U(t, 0) = e^{-iHt} . \quad (1.5.2)$$

Para una partícula libre $H = p^2/2m$. Haciendo uso de (1.2.5), la amplitud de probabilidad se puede escribir de la forma

$$\langle \mathbf{y}, t | U(t, 0) | \mathbf{x}, 0 \rangle = \langle \mathbf{y} | e^{-iHt} | \mathbf{x} \rangle \quad (1.5.3)$$

$$= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{y} | e^{-iHt} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle \quad (1.5.4)$$

$$= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{y} | \mathbf{p} \rangle e^{-i \frac{p^2 t}{2m}} \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle \quad (1.5.5)$$

$$= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i \frac{p^2 t}{2m}} e^{-i \mathbf{p}(\mathbf{y} - \mathbf{x})} , \quad (1.5.6)$$

$$(1.5.7)$$

esta integral se puede evaluar haciendo uso de las tablas matemáticas apropiadas, su resultado es

$$\langle \mathbf{y}, t | U(t, 0) | \mathbf{x}, 0 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{-i \frac{m(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2}{2t}}. \quad (1.5.8)$$

Como vemos, esta expresión nunca es cero. Incluso cuando $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| > ct$ obtenemos una probabilidad diferente de cero. Sin embargo, el principio de causalidad implica que nada puede viajar más rápido que la luz y, por lo tanto, la amplitud de probabilidad debería anularse para $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| > ct$. Así, pues, la mecánica cuántica viola el principio de causalidad.

Se podría pensar que la teoría relativista solventaría este problema. En este caso, la integral a considerar es

$$\langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{P^2+m^2}} | \mathbf{y} \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \quad (1.5.9)$$

$$\approx e^{-m\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2-(ct)^2}}, \quad (1.5.10)$$

donde la aproximación se ha obtenido mediante el método de la máxima pendiente. Como vemos, esta expresión adolece del mismo problema de causalidad.

Así, pues, para obtener una teoría cuántica consistente con la relatividad especial debemos trabajar en la cuantización del campo $\phi(x)$, ya que el proceso de cuantización canónica lleva a inconsistencias.

Capítulo 2

Teoría clásica de campos

En este capítulo repasaremos los conceptos básicos de la teoría clásica de campos, como una extensión a medios continuos de la mecánica de Lagrange y de Hamilton. Para ello, comenzaremos por exponer el formalismo matemático de los funcionales y las derivadas funcionales, que es la herramienta matemática en que se basa la teoría de campos.

El formalismo de la teoría clásica de campos representa la base de la teoría cuántica de campos, en donde se procede a la cuantificación de los campos dinámicos.

2.1. Derivadas funcionales

Un *funcional* se define como una aplicación entre un espacio de funciones, \mathcal{M} , y un cuerpo de escalares, que suelen ser los reales, \mathbb{R} , o los complejos, \mathbb{C}

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \\ \phi(x) &\mapsto F[\phi] \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Si la función argumento depende de otro parámetro, $\phi(x, y)$, el funcional será, a la vez, una función de este segundo parámetro. En este caso, utilizaremos la notación

$$\phi(x, y) \mapsto F[\phi, y] \quad (2.1.2)$$

En estas definiciones, las variables x e y pueden ser tanto reales, vectores o cuadvectores. De esta forma, los funcionales son una extensión natural de las funciones habituales.

En este contexto, tiene sentido preguntarse que variación sufre el funcional cuando aplicamos una pequeña variación a su argumento,

$$\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi \quad (2.1.3)$$

la variación del funcional vendrá dada por

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &= F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] \\ &= \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde la cantidad

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (2.1.5)$$

se conoce como *derivada funcional* del funcional F .

Una definición alternativa, pero equivalente, se obtiene considerando variaciones de la función argumento que sean proporcionales a una delta de Dirac,

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \epsilon \delta(x - y) \quad (2.1.6)$$

En este caso, aplicado la ecuación (2.1.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\delta F[\phi] &= \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta(x-y) \\ &= \epsilon \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)},\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

y, por lo tanto, recordando la definición de la variación $\delta F[\phi]$ podemos aislar el valor de la derivada funcional como un límite,

$$\boxed{\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon \delta(x-y)] - F[\phi]}{\epsilon}}.\tag{2.1.8}$$

Esta definición cumple las propiedades básicas de cualquier tipo de derivada,

1. Regla del producto: $\frac{\delta (G[\phi]F[\phi])}{\delta \phi(y)} = \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} F[\phi] + G[\phi] \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)},$
2. Regla de la cadena: $\frac{\delta F[G[\phi, x]]}{\delta \phi(y)} = \int dx \frac{\delta F[G[\phi]]}{\delta G[\phi, x]} \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(y)},$
3. Derivada de la misma función: $\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x-y),$

esta última propiedad debe entenderse como una generalización de

$$\frac{dq_i}{dq_j} = \delta_j^i.\tag{2.1.9}$$

Gran parte de los funcionales que son de utilidad en las teorías de campos tienen la forma de una integral,

$$F[\phi] = \int dx f(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), \partial_\mu \partial_\nu \phi(x)),\tag{2.1.10a}$$

donde f es una función cualquiera, que consideraremos suficientemente bien comportada. En este caso, la variación del funcional puede escribirse como la integral de la variación de f ,

$$\delta F[\phi] = \int dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial f}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) + \frac{\partial f}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi)} \delta (\partial_\mu \partial_\nu \phi) \right\}.\tag{2.1.10b}$$

Tal y como se define la variación de la función argumento, la variación de la derivada es la derivada de la variación. Por lo tanto, la ecuación anterior puede ponerse en términos de $\delta \phi$ realizando una integración por partes; el termino de superficie se anulará debido a que consideramos variaciones tales que $\delta \phi = 0$ en la frontera. Por lo tanto, teniendo en cuenta la ecuación (2.1.4) obtenemos

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial f}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial f}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi)}.\tag{2.1.10c}$$

2.2. Formalismo lagrangiano

En un sistema lagrangiano de diversos grados de libertad acostumbramos a denotar cada variable con la misma letra, pero con un índice distintivo, $\{q_i(t)\}$. En este formalismo, podemos utilizar tantos grados de libertad como sean necesarios, incluso si son infinitos pero numerables. Sin embargo, existen situaciones de interés físico en que existe un número infinito no numerable de grados de libertad. Un ejemplo típico es la vibración de una cuerda, donde los grados de libertad es la separación del estado de equilibrio de cada elemento de la cuerda. Dado que en una cuerda, incluso finita, existe un número infinito e innumerable de elementos diferenciales de masa, el índice i podrá tomar cualquier valor en un cierto intervalo del eje real, $q_x(t)$. Sin embargo, es más

elegante describir los grados de libertad mediante un campo $\phi(x, t) := q_x(t)$, tal que representa la separación del equilibrio del elemento de masa situado en la posición x en el tiempo t .

De ahora en adelante consideraremos un sistema descrito por un campo $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$, donde ahora \mathbf{x} juega el papel del índice i , que ahora puede tomar valores en una cierta región del espacio tridimensional.

De esta forma, mediante este proceso de paso al límite continuo obtenemos de forma natural las ecuaciones de la mecánica clásica de campos. Los sumatorios respecto del índice i deberán reemplazarse por integrales respecto de x , y las derivadas respecto de q_i por derivadas funcionales respecto de $\phi(x)$. Por otra parte, las funciones dinámicas en el espacio de fases pasarán a ser funcionales de $\phi(x)$ y sus derivadas.

El lagrangiano del sistema pasa a ser un funcional de $\phi(x)$ y $\dot{\phi}(x) = \partial_t \phi(x)$. En gran cantidad de ocasiones conviene escribir el lagrangiano como la integral a todo el espacio de la variable \mathbf{x} ,

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) , \quad (2.2.1)$$

donde \mathcal{L} es la *densidad lagrangiana*. A lo largo de este curso trataremos, de forma prácticamente exclusiva, con densidades lagrangianas en vez del lagrangiano completo.

La integral temporal de la lagrangiano es, como de costumbre, la acción del sistema,

$$\begin{aligned} S[\phi, \dot{\phi}] &= \int dt L[\phi, \dot{\phi}] \\ &= \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) . \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Las ecuaciones del movimiento clásicas se pueden obtener como la derivada funcional de S respecto de $\phi(x)$ igualada a cero. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.1.10), se puede demostrar que las ecuaciones del movimiento son las de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0 \mapsto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 . \quad (2.2.3)$$

2.3. Formalismo hamiltoniano

Los pasos para construir el formulismo hamiltoniano a partir de lagrangiano son los mismos en la teoría clásica de campos que en la mecánica discreta. Para comenzar, repasaremos los pasos necesarios en el caso de variables discretas.

1. Definir los momentos conjugados, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$,
2. Invertir la relación anterior para obtener las velocidades en función del momento,
3. Definir la función hamiltoniana, $H = \sum_i p_i \dot{\phi}_i - L$,
4. Expresar el hamiltoniano en función solamente de p , q y tal vez t usando las expresiones obtenidas en el segundo paso.

En la teoría clásica de campos la definición de momentos se hace utilizando derivadas funcionales de la lagrangiana,

$$\Pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} , \quad (2.3.1)$$

y la definición de hamiltoniana se extiende de forma natural según las reglas dadas en las secciones anteriores,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \Pi(x) \dot{\phi}(x) - L \\ &= \int d^3 x \left(\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right) , \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

donde la primera integral es la generalización de la suma sobre i en la definición discreta. Las ecuaciones del movimiento la generalización directa de la versión discreta (1.1.2)¹

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H}{\delta \Pi(x)} , \quad \dot{\Pi}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(x)} . \quad (2.3.3)$$

Tan sólo nos resta por encontrar la generalización a una teoría continua del paréntesis de Poisson, ec. (1.1.3), donde tan sólo tenemos que reemplazar el sumatorio por una integral y las derivadas por derivadas funcionales,

$$\{F, G\}_{\text{PB}} = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi(x)} - \frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \frac{\delta F}{\delta \Pi(x)} \right) . \quad (2.3.4)$$

El paréntesis de Poisson generalizado del campo y su momento conjugado vendrá dado por la delta de Dirac,

$$\{\phi(f, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})\}_{\text{PB}} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (2.3.5)$$

y la derivada temporal de cualquier funcional se puede escribir como su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{\text{PB}} + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (2.3.6)$$

Acabaremos esta discusión considerando un ejemplo: el campo escalar real con masa m .

Ejemplo 2.3.1 (Campo escalar real con masa) Consideramos un sistema descrito por la siguiente densidad de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 , \quad (2.3.7)$$

donde los índices se suben y se bajan con la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. El momento conjugado será

$$\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) , \quad (2.3.8)$$

y por lo tanto el hamiltoniano es de la forma

$$\mathcal{H} = \Pi^2(x) - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^2(x) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \quad (2.3.9)$$

2.4. Teorema de Noether

2.4.1. Enunciado y demostración

El teorema de Noether implementa un procedimiento natural para encontrar cantidades conservadas de un lagrangiano a partir de las simetrías continuas que posee. En este documento, vamos a obtener este teorema de forma constructiva. Comenzamos por considerar una transformación infinitesimal de la forma

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu , \quad (2.4.1)$$

$$\phi_r(\mu) \longrightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta \phi_r(x) , \quad (2.4.2)$$

Suponemos que esta transformación es tal que deja invariantes las ecuaciones del movimiento, es decir, deja la acción invariante, $S' = S$.

En este contexto, la variación $\delta \phi = \phi'_r(x') - \phi_r(x)$ no tiene por que conmutar con la derivación parcial, ya es la diferencia de dos términos con argumentos distintos.

Por lo tanto, nos será útil considerar la variación con argumentos iguales,

$$\begin{aligned} \Delta \phi_r(x) &:= \phi'_r(x) - \phi_r(x) \\ &= \left(\phi'_r(x) - \phi'_r(x') \right) + \left(\phi'_r(x') - \phi_r(x) \right) \\ &= \delta \phi_r(x) + \left(\phi'_r(x) - \phi'_r(x') \right) , \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

¹Las ecuaciones del movimiento pueden deducirse expresando la variación del hamiltoniano δH de dos formas: a partir de los campos de los cuales depende, y a partir de la definición (2.3.2). Ver, por ejemplo, [1].

desarrollando $\phi'_r(x')$ al rededor de $x' = x$,

$$\begin{aligned}\phi'_r(x') &= \phi'_r(x) + \frac{\partial \phi'_r}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu + o(\delta x)^2 \\ &= \phi'_r(x) + \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\phi_r(x) + \delta \phi_r(x) \right) \delta x^\mu + o(\delta x)^2 \\ &= \phi'_r(x) + \frac{\partial \phi_r}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu ,\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

donde hemos considerado tan solo variaciones de primer orden, y además hemos tenido en cuenta que $\partial'_\mu = \partial_\mu + o(\delta x^\mu)$. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta \phi_r(x) = \delta \phi_r(x) - \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu .\tag{2.4.5}$$

Por otra parte, la variación de la acción vendrá dada en función de la variación de la densidad lagrangiana,

$$\delta S = \int d^4 x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4 x \mathcal{L}(x) ,\tag{2.4.6}$$

donde $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x)$. Para escribir las dos integrales para la misma variable de integración, debemos utilizar un cambio de variables entre ambas. El jacobiano de la transformación será de la forma

$$d^4 x' = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4 x , \quad \text{donde } d^4 x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 ,\tag{2.4.7}$$

el determinante a primer orden es

$$\left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \cdots \\ \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} + o(\delta x^\mu)^2 ,\tag{2.4.8}$$

con lo que la expresión para la variación de la acción queda

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4 x' \delta \mathcal{L} + \int d^4 x \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) \mathcal{L}(x) - \int d^4 x \mathcal{L}(x) , \\ &= \int d^4 x' \left(\Delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) + \int d^4 x \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \mathcal{L}(x) ,\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

donde en el segundo paso hemos utilizado la ecuación (2.4.5) escrita para \mathcal{L} . Dado que todos los integrandos son de primer orden en las variaciones, podemos pasar todas las integrales a la variable x (sin prima) sin ningún jacobiano, ya que éste nos daría contribución de segundo orden,

$$\delta S = \int d^4 x \left(\Delta \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right) ,\tag{2.4.10}$$

La variación de la lagrangiana será

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \Delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \partial_\mu (\Delta \phi_r) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right] \Delta \phi_r + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \Delta \phi_r \right] ,\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

el primer término se anula por las ecuaciones del movimiento, ec. (2.2.3), por lo que finalmente tenemos

$$\delta S = \int d^4 x \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - \eta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \right\} .\tag{2.4.12}$$

Si la transformación (2.4.1) es una simetría, $\delta S = 0$, esto nos implica que existe un vector conservado,

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - \eta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu , \quad (2.4.13)$$

llamado *corriente de Noether* tal que $\partial_\mu j^\mu = 0$. La versión integral de esta conservación, teniendo en cuenta las componentes espaciales y temporales, nos da

$$\frac{d}{dt} \int d^3 \mathbf{x} j^0 + \int d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (2.4.14)$$

donde la segunda integral se puede escribir como una integral a la superficie, que se anulará. Por lo tanto, vemos que la integral a todo el volumen de j^0 es una constante del movimiento, que conocemos como *carga de Noether*

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3 \mathbf{x} j^0 \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \{ \Pi_r(x) \delta \phi_r(x) - [\Pi_r \partial_\nu \phi_r - \eta_\nu^0 \mathcal{L}] \delta x^\nu \} . \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Existe una versión más sencilla, pero menos potente, del teorema de Noether donde no se tiene en cuenta la variación del campo debido a la variación de su argumento. En este caso, no es necesario definir la variación de tipo $\Delta \phi_r$, pero a la hora de aplicar el teorema es necesario tener en cuenta cual es la variación $\delta \phi_r$ a causa de la variación de su argumento. En el caso más general que hemos presentado, tan sólo es necesario incluir aquellas variaciones del campo ϕ_r debidas al cambio en su forma funcional.

2.4.2. Ejemplos de aplicación del teorema de Noether

Para profundizar en el estudio del teorema de Noether, resolveremos algunos ejemplos de interés.

Ejemplo 2.4.1 (Simetría de translaciones) *Estudiamos transformaciones del tipo*

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu , \quad (2.4.16)$$

donde ε^μ es el vector de translación. En este caso, el campo no sufre ninguna variación intrínseca, $\delta \phi_r = 0$. Dado que el parámetro de la transformación tiene un índice, el corriente de Noether tendrá un segundo índice extra,

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} , \quad (2.4.17)$$

y, por lo tanto, tendremos cuatro cargas conservadas para $\nu = 0$,

$$E = \int d^3 \mathbf{x} T^{00} , \quad (2.4.18)$$

$$P^i = \int d^3 \mathbf{x} T^{0i} , \quad (2.4.19)$$

para $i = 1, 2, 3$. Estas cargas se interpretan físicamente como la energía y el momento total. Por lo tanto, tal y como ocurren en la mecánica de Newton, la energía se conserva si el sistema es invariante bajo translaciones temporales, y el momento es constante si hay invariancia ante cambios en el origen de coordenadas.

Ejemplo 2.4.2 (Simetrías internas) *En este caso consideraremos un sistema descrito por una serie de campos, $\phi_r(x)$, que es invariante ante transformaciones del tipo*

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + i\epsilon \sum_s \lambda_{rs} \phi_s(x) , \quad (2.4.20)$$

sin variación en el sistema de coordenadas, $x' = x$. En este caso el corriente de Noether es

$$j^\mu = i\epsilon \sum_{r,s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s(x) , \quad (2.4.21)$$

y la carga conservada

$$Q = i\epsilon \int d^3x \sum_{r,s} \Pi_r(x) \lambda_{rs} \phi_s(x) , \quad (2.4.22)$$

Ejemplo 2.4.3 (Simetría de fase global) Consideramos el lagrangiano de un campo escalar complejo de masa m ,

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* , \quad (2.4.23)$$

que es obviamente simétrico respecto de la transformación de fase global,

$$\phi'(x') = e^{i\epsilon} \phi(x) , \quad (2.4.24)$$

donde ϵ es constante. En este caso, el corriente de Noether se obtiene considerando ϕ y ϕ^* como campos independientes,

$$\begin{aligned} j^\mu &= (-i) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^*(x) \right\} \\ &= (-i) \left\{ \left(\partial_\mu \phi^*(x) \right) \phi(x) - \left(\partial_\mu \phi(x) \right) \phi^*(x) \right\} . \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Se hace notar que, excepto un factor constante global, este es el corriente de probabilidad que habíamos sugerido para la ecuación de Klein-Gordon en la sección 1.4, ec. (1.4.4), y al que no habíamos podido dar una interpretación probabilística a causa de que la carga conservada, Q , podía ser tanto positiva como negativa. Además, habíamos visto que existían soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con energía positiva y negativa, cada una de las cuales iba asociada a un signo de la carga Q . En la teoría cuántica de campos, como veremos a lo largo de este documento, las soluciones de aparente energía negativa van asociadas con antipartículas (de energía positiva, y por tanto físicas). Por tanto, para las partículas y las antipartículas vienen caracterizadas por signos opuestos en su carga conservada Q ; esto nos permite asociar la carga de Noether con la carga eléctrica. Por tanto, la razón microscópica de la conservación de la carga está en el hecho de que los lagrangianos sean invariantes ante transformaciones de fase global.

Ejemplo 2.4.4 (Transformaciones de Lorentz) Las transformaciones de Lorentz se representan mediante aquellas matrices $\Lambda_{\nu'}^{\mu'}$ que dejan invariante la métrica de Minkowski,

$$\eta^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \eta^{\mu\nu} . \quad (2.4.26)$$

Comencemos por caracterizar una transformación de Lorentz infinitesimal, $\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \delta_{\nu'}^{\mu'} + \omega_{\nu'}^{\mu'}$,

$$\begin{aligned} \eta^{\mu'\nu'} &= \eta^{\mu\nu} \left(\delta_{\mu'}^{\mu} + \omega_{\mu'}^{\mu} \right) \left(\delta_{\nu'}^{\nu} + \omega_{\nu'}^{\nu} \right) \\ &= \eta^{\mu\nu} \left(1 + \delta_{\mu'}^{\mu'} \omega_{\nu'}^{\mu'} + \delta_{\nu'}^{\nu'} \omega_{\mu'}^{\mu'} + o(\omega)^2 \right) , \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

y por tanto tenemos

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0 . \quad (2.4.28)$$

Consideramos la transformación infinitesimal de las coordenadas y el campo,

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} x^\nu = x^\mu + \omega_{\nu'}^{\mu} x^\nu , \\ \phi_r(x) &\longrightarrow \phi'_r(x') = \phi(x) + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{rs} \phi_s(x) , \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

donde $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$ son los generadores infinitesimales de las transformaciones de Lorentz, que satisfacen el álgebra de Lie

$$[I_{\mu\nu}, I_{\sigma\tau}] = \eta_{\nu\sigma} I_{\mu\tau} + \eta_{\mu\tau} I_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\tau} I_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} I_{\nu\tau} , \quad (2.4.30)$$

una posible representación de esta álgebra es $I_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha$. El corriente de Noether en esta ocasión es

$$j^\mu = \frac{1}{2} \omega_{\nu\lambda} M^{\mu\nu\lambda}(x) , \text{ donde } M^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\lambda} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} (I^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s(x) , \quad (2.4.31)$$

y en este caso, las cargas conservadas tienen dos índices,

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3\mathbf{x} M^{0\nu\lambda} . \quad (2.4.32)$$

Resulta de interés considerar las componentes espaciales de estas cargas,

$$M^{ij} = L^{ij} + S^{ij} , \quad (2.4.33)$$

donde

$$L^{ij} = \int d^3\mathbf{x} (T^{0i}x^j - T^{0j}x^i) , \quad (2.4.34)$$

$$S^{ij} = \int d^3\mathbf{x} \Pi_r(x)(I^{ij})_{rs}\phi_s(x) , \quad (2.4.35)$$

que están asociadas con el momento angular orbital y de spin, respectivamente. Las componentes M^{0i} están relacionadas con la conservación de las coordenadas del centro de masas y no son de nuestro interés.

En el grupo de Poincaré, que agrupa las translaciones espacio temporales, con carga de Noether P^μ , y las transformaciones de Lorentz, generadas por $M^{\mu\nu}$, define la llamada álgebra de Poincaré, que cumple las relaciones

$$\{P_\mu, P_\nu\}_{\text{PB}} = 0 , \quad (2.4.36)$$

$$\{M_{\mu\nu}, P_\lambda\}_{\text{PB}} = \eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu , \quad (2.4.37)$$

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\sigma\tau}\}_{\text{PB}} = \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\tau} + \eta_{\mu\tau}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\tau}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\tau} . \quad (2.4.38)$$

2.4.3. Obtención de la simetría a partir de las cargas

Una de las ventajas de la versión del teorema de Noether que hemos presentado es que dada la carga conservada podemos recuperar cual es la simetría que la garantiza. De hecho, se puede demostrar que la variación a argumentos iguales se puede escribir como el paréntesis de Poisson del campo con la carga,

$$\Delta\phi_r(x) = \left\{ \phi_r(x), Q \right\}_{\text{PB}} , \quad (2.4.39)$$

donde Q viene dado por la ecuación (2.4.15). Para demostrarlo, tan sólo tenemos que calcular el paréntesis de Poisson según su definición,

$$\begin{aligned} \left\{ \phi_r(x), Q \right\}_{\text{PB}} &= \sum_s \int d^3\mathbf{y} \left(\frac{\delta\phi_r(x)}{\delta\phi_s(y)} \frac{\delta Q}{\delta\Pi_s(y)} - \frac{\delta\phi_r(x)}{\delta\Pi_s(y)} \frac{\delta Q}{\delta\phi_s(y)} \right) \\ &= \sum_s \int d^3\mathbf{y} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{rs} [\delta\phi_s(y) - \partial_\nu\phi_s(y)\delta x^\nu] \\ &= \delta\phi_r(x) - \partial_\nu\phi_r(x)\delta x^\nu , \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

que es la expresión para $\Delta\phi_r(x)$, ec. (2.4.5).

Capítulo 3

Cuantización del campo escalar real de Klein-Gordon

En este capítulo comenzaremos por fin la cuantización de los campos clásicos. Concretamente, realizaremos la cuantización del campo real de Klein-Gordon libre.

Con este propósito, introduciremos las imágenes de la mecánica cuántica, en concreto la de Schödinger y la de Heisemberg, dejando la imagen de interacción para el próximo capítulo. Posteriormente, realizaremos la cuantización canónica del campo de Klein-Gordon, y veremos que se puede interpretar como un número infinito (continuo) de osciladores armónicos. Utilizando el formalismo de los operadores de creación y destrucción propio del oscilador armónico, seremos capaces de construir todos los estados del espacio de Hilbert de la teoría, y veremos que este espacio no es más que la suma directa de los espacios de Hilbert de cero partículas (vacío), de una partícula, de dos, etc.

A continuación veremos como la cuantización del campo resuelve el problema de la causalidad; y veremos como este problema nos lleva a considerar los propagadores, tanto el retardado como el de Feynman. Dejaremos, pues, la interacción del campo consigo mismo, o con otros campos, para temas posteriores.

3.1. Imágenes de la mecánica cuántica. Imagen de Schödinger y de Heisemberg

Dado un operador unitario, $U^\dagger = U^{-1}$, podemos definir una transformación unitaria del espacio de Hilbert de la siguiente forma,

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = U |\psi\rangle . \quad (3.1.1)$$

Las transformaciones unitarias son interesantes que conservan todos los productos de Hilbert,

$$\begin{aligned} \langle\psi|\phi\rangle &\longrightarrow \langle\psi'|\phi'\rangle \\ &= \left(\langle\psi|U^\dagger\right)\left(U|\phi\rangle\right) \\ &= \langle\psi|U^{-1}U|\phi\rangle \\ &= \langle\psi|\phi\rangle . \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Para que los elementos de matriz, $\langle\psi|O|\phi\rangle$, también sean invariantes ante transformaciones unitarias es necesario que los operadores transformen de forma homogénea,

$$O \longrightarrow O' = UOU^\dagger , \quad (3.1.3)$$

como se puede demostrar de forma prácticamente trivial.

De esta forma, para cada elección del operador U obtenemos una *imagen de la mecánica cuántica* totalmente equivalente. Las imágenes más útiles y habituales son las de Schödinger, Heisemberg e interacción (que estudiaremos en el siguiente capítulo).

La imagen de Schödinger es la que habíamos introducido en el capítulo 1. Se caracteriza por que los operadores son independientes del tiempo, y los estados evolucionan según la ecuación de Schödinger,

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle , \quad (3.1.4)$$

y por lo tanto dependen del tiempo.

Tal y como vimos el capítulo 1, se puede escribir el estado en cualquier instante del tiempo mediante el operador de evolución, ec. (1.5.2)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle . \quad (3.1.5)$$

El operador de evolución temporal es unitario, cosa que nos permite utilizarlo para realizar una transformación unitaria del espacio de Hilbert. Podemos pues considerar la ecuación (3.1.5) como una transformación unitaria que convierte el estado independiente del tiempo, $|\phi(0)\rangle$, en un estado dependiente del tiempo de la imagen de Schödinger, $|\psi(t)\rangle$. De esta forma definimos la *imagen de Heisemberg* como aquella en que los estados no tienen evolución temporal. Invirtiendo la ecuación (3.1.5) podemos hallar la relación entre ambas imágenes

$$|\psi\rangle^H = e^{iHt} |\psi(t)\rangle^S , \quad (3.1.6)$$

$$O^H(t) = e^{iHt} O^S e^{-iHt} . \quad (3.1.7)$$

Como vemos, pues, en la imagen de Heisemberg la dependencia temporal está enteramente en los operadores y no en los estados. Así, pues, debemos encontrar una ecuación dinámica para los operadores de la teoría. Esto se puede hacer de forma directa tomando su derivada temporal y utilizando las definiciones,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} O^H(t) &= i \frac{d}{dt} \left(e^{iHt} O^S e^{-iHt} \right) \\ &= -H e^{iHt} O^S e^{-iHt} + e^{iHt} O^S e^{-iHt} H \\ &= O^H(t) H - H O^H(t) , \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

y, por lo tanto

$$\boxed{i \frac{d}{dt} O^H(t) = [O^H(t), H]} , \quad (3.1.9)$$

es decir, en la imagen de Heisemberg los operadores satisfacen la generalización de las ecuaciones de Hamilton, ec. (1.1.5).

Históricamente, la mecánica cuántica fue desarrollada por Schödinger y Heisemberg de forma prácticamente simultánea, pero en diferentes imágenes. Inicialmente, hubo una gran polémica, ya que no se sabía cuál de las dos podía ser la correcta, hasta que el joven físico P. A. M. Dirac demostró que ambas teorías eran equivalentes, y se relacionaban mediante una transformación unitaria.

3.2. Cuantización del campo escalar de Klein-Gordon real

3.2.1. Operadores de creación y destrucción

En su versión clásica, el campo de Klein-Gordon real obedece al lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 , \quad (3.2.1)$$

del que se deduce la ecuación del movimiento,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi = 0 . \quad (3.2.2)$$

El momento es $\Pi(x) = \dot{\phi}(x)$, y cumple la relación canónica,

$$\{\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)\}_{\text{PB}} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (3.2.3)$$

El hamiltoniano correspondiente es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 . \quad (3.2.4)$$

El siguiente paso lógico sería aplicar el procedimiento de la cuantización canónica a la teoría de campos. Es decir, elevamos a $\phi(x)$ y $\Pi(x)$ a la categoría de operadores, con relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales,¹

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (3.2.5)$$

El primer paso para realizar la cuantización consiste en realizar el desarrollo de Fourier de los campos, respecto de las variables de espacio,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t) , \quad (3.2.6a)$$

$$\Pi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \Pi(\mathbf{p}, t) , \quad (3.2.6b)$$

donde $\phi(\mathbf{p}, t)$ y $\Pi(\mathbf{p}, t)$ son las transformadas de Fourier del campo y el momento respectivamente. La ecuación de Klein-Gordon transformada se escribe de la forma

$$(\partial_t^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \phi(\mathbf{p}, t) = 0 . \quad (3.2.7)$$

Observamos que la ecuación de Klein-Gordon transformada (en espacio de momentos) corresponde a una colección continua de osciladores armónicos de frecuencia

$$\omega_p = E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} . \quad (3.2.8)$$

Recordemos que en la mecánica cuántica de Schödinger, el oscilador armónico

$$H_{\text{oa}} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 , \quad (3.2.9)$$

se puede cuantizar algebraicamente definiendo los operadores de creación y destrucción

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(Q + i\frac{1}{m\omega}P \right) , \quad (3.2.10a)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(Q - i\frac{1}{m\omega}P \right) , \quad (3.2.10b)$$

cuyo conmutador es proporcional a la identidad,

$$[a, a^\dagger] = 1 . \quad (3.2.11)$$

También podemos escribir los operadores momento y posición en términos de los operadores de creación y destrucción

$$P = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) , \quad (3.2.12a)$$

$$Q = (-i)\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} (a - a^\dagger) . \quad (3.2.12b)$$

Se puede demostrar, ver por ejemplo [4], que el espectro del oscilador armónico está formado por un conjunto discreto de estados $|n\rangle$, con $n \geq 0$, que se relacionan entre ellos mediante los operadores de creación y destrucción,

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle , \quad (3.2.13a)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad (3.2.13b)$$

¹Naturalmente, especificar que las relaciones de conmutación son a tiempos iguales tan sólo tiene importancia en la imagen de Heisenberg, ya que los operadores son independientes del tiempo en la imagen de Schödinger.

con lo que un estado cualquiera $|n\rangle$ se puede obtener a partir del estado fundamental a partir de la relación

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle . \quad (3.2.14)$$

El operador número, $N = a^\dagger a$, es útil para conocer el número de excitaciones de un estado concreto,

$$N |n\rangle = n |n\rangle . \quad (3.2.15)$$

Finalmente, el hamiltoniano se puede escribir tan sólo en términos del operador número,

$$H_{\text{oa}} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.2.16)$$

Inspirados por estos resultados, podemos suponer que $\phi(\mathbf{p}, t)$ y $\Pi(\mathbf{p}, t)$ se puede escribir en términos de un conjunto infinito de operadores de creación y destrucción, correspondientes a un oscilador armónico de masa unidad, como una generalización directa de las ecuaciones (3.2.12). Por lo tanto, los operadores de campo, en la imagen de Schödinger, quedan escritos de la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}) , \quad (3.2.17a)$$

$$\Pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}) . \quad (3.2.17b)$$

En este caso, la relación de conmutación de los operadores de creación y destrucción son

$$[a_p, a_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') . \quad (3.2.18)$$

El operador de creación, a_p^\dagger , añade una partícula de momento p al sistema, es decir, si el estado inicial es el vacío $|0\rangle$, es decir

$$|p\rangle = a_p^\dagger |0\rangle , \quad (3.2.19)$$

es el estado de una sola partícula con momento p .

Utilizando la descomposición (3.2.17) podemos encontrar el hamiltoniano, ec. (3.2.4), en términos de los operadores de creación y destrucción,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{E_p E_k}}{4} (a_p - a_{-p}^\dagger) (a_k - a_{-k}^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}}{4\sqrt{E_p E_k}} (a_p - a_{-p}^\dagger) (a_k - a_{-k}^\dagger) + \frac{m^2}{4\sqrt{E_p E_k}} (a_p + a_{-k}^\dagger) (a_k + a_{-p}^\dagger) \right\} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_p \{ a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger \} , \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

aplicando las relaciones de conmutación obtenemos

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p \left\{ a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right\} , \quad (3.2.21)$$

que se puede interpretar como la suma de la energía de infinitos osciladores armónicos. El término que contiene la delta de Dirac es divergente, pero su origen se puede entender como la suma de la energía de punto cero de infinitos osciladores. Dado que físicamente tan sólo tiene sentido hablar de diferencias de energías, podemos olvidarnos de este término. Para hacerlo, definimos el orden normal de un operador, $:O:$, como su expresión

pasando todos los operadores de creación a la izquierda, y los de destrucción a la derecha, sin tener en cuenta las relaciones de conmutación,

$$: H : = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p . \quad (3.2.22)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos encontrar una expresión para el operador momento,

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_p^\dagger a_p , \quad (3.2.23)$$

donde no es necesario utilizar el orden normal, dado que el momento es una función impar, y su integración a todo el espacio cancela el término divergente.

Para confirmar nuestra interpretación de que el operador de creación, a_p^\dagger , añade una partícula con momento \mathbf{p} al sistema, consideramos el valor esperado de \mathbf{P} sobre el estado $a_p^\dagger |0\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_k \mathbf{P} a_k^\dagger | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \langle 0 | a_k a_p^\dagger a_p a_k^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \langle 0 | \left(a_p^\dagger a_k + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \right) a_p a_k^\dagger | 0 \rangle \\ &= \mathbf{k} \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Debe notarse que la interpretación de partículas de la teoría cuántica de campo depende de la existencia de los operadores H y \mathbf{P} como cantidades conservadas. Por lo tanto, en aquellas teorías que no posean simetrías bajo translaciones en el espacio tiempo (como por ejemplo las teorías sobre espacio-tiempos curvados), podrían no ser interpretables en términos de partículas.

Por otra parte, dado que los operadores de creación conmutan entre si, las partículas que estamos describiendo son bosones, ya que siguen la estadística de Bose-Einstein, $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle$.

3.2.2. Normalización invariante Lorentz

La normalización más evidente de los estados,

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) , \quad (\text{naïve}) \quad (3.2.25)$$

no es apropiada, dado que no es invariante Lorentz. Veamos como transforma la delta de Dirac bajo una transformación de Lorentz (boost) en la dirección OZ,

$$\begin{aligned} \delta(p^3 - q^3) &= \delta(p^{3'} - q^{3'}) \left| \frac{dp^{3'}}{dp^3} \right| \\ &= \frac{E'}{E} \delta(p^{3'} - q^{3'}) , \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

y, por lo tanto, la manera de normalizar de forma invariante los estados es

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) . \quad (3.2.27)$$

Esta normalización nos obliga a definir los diferentes estados como

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle . \quad (3.2.28)$$

Consideremos ahora el efecto de una transformación de Lorentz sobre los estados y operadores de la teoría. Una transformación de Lorentz general se define mediante la matriz Λ_ν^μ ,

$$p^\mu \longrightarrow p^{\mu'} = \Lambda_\nu^{\mu'} p^\nu . \quad (3.2.29)$$

Sobre los estados, esto se traducirá en la aplicación de un operador unitario $U(\Lambda)$,

$$|\mathbf{p}\rangle \longrightarrow |\mathbf{p}'\rangle = U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle = |\Lambda \mathbf{p}\rangle . \quad (3.2.30)$$

Los operadores de creación se transfoman segun

$$\sqrt{2E_{\Lambda p}} a_{\Lambda p}^\dagger |0\rangle = U(\Lambda) \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle , \quad (3.2.31)$$

de donde obtenemos

$$a_p^\dagger \longrightarrow U(\Lambda) a_p^\dagger U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a_{\Lambda p}^\dagger . \quad (3.2.32)$$

Por otra parte, la relación de completitud sobre el subespacio de una partícula se escribe de la forma

$$(\mathbb{1})_{1 \text{ part.}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| . \quad (3.2.33)$$

Dado que la identidad es invariante de Lorentz, el elemento de integración de la integral anterior también debe de serlo. En efecto, el elemento de integración de la ecuación (3.2.33) se puede obtener a partir de una integral manifestamente invariante,

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0} . \quad (3.2.34)$$

Este elemento de integración invariante puede ayudarnos a comprender la interpretación del operador campo, ya que al ser aplicado sobre el estado vacío obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(x) |0\rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \{a_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle , \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

que no es más que la descomposición de Fourier, invariante Lorentz, del estado correspondiente a una partícula creada en la posición \mathbf{x} .

3.2.3. El campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo

Hasta ahora hemos trabajado en la imagen de Schödinger. Sin embargo, resulta más interesante trabajar en la imagen de Heisenberg, ya que en ella es más sencillo afrontar los sistemas con interacción².

Recordemos que en la imagen de Heisenberg los operadores cumplen la ecuación de Hamilton, ec. (3.1.9),

$$i \frac{dO^H}{dt} = [O^H, H] . \quad (3.2.36)$$

Particularizando esta ecuación para el operador campo, $\phi^H(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} i \frac{d\phi^H(x)}{dt} &= \left[\phi^H(x), \int dx' \left\{ \frac{1}{2} (\nabla(x'))^2 + \frac{1}{2} \Pi^2(x') + \frac{1}{2} m^2 \phi^{H^2}(x') \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dx' \left\{ [\phi^H(x), \Pi(x')] \Pi(x') + \Pi(x') [\phi^H(x), \Pi(x')] \right\} \\ &= i \int dx' \Pi(x') \delta(x - x') , \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

y, por tanto, tenemos

$$i \frac{d\phi^H(x)}{dt} = i \Pi(x) , \quad (3.2.38)$$

$$i \frac{d\Pi(x)}{dt} = -i [\nabla^2 \phi^H(x) - m^2 \phi^H(x)] , \quad (3.2.39)$$

²De hecho, para los sistemas en interacción consideraremos una tercera imagen, la imagen de interacción, donde los operadores evolucionan según el hamiltoniano libre y los estados tan sólo segun la parte de interacción. No obstante, la imagen de interacción del hamiltoniano total corresponde a la imagen de Heisenberg del hamiltoniano libre, con lo cual resulta de gran interés estudiar ésta última en este capítulo, donde tan solo consideramos teorías libres.

donde la ecuación para el momento canónico se ha obtenido siguiendo un procedimiento similar al anterior. Juntando ambas ecuaciones recuperamos la ecuación de Klein-Gordon en la imagen de Heisenberg,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi^H(x) = 0 . \quad (3.2.40)$$

También podemos hallar las ecuaciones del movimiento para los operadores de creación y destrucción expandiendo el hamiltoniano en términos de ellos mismos. Los resultados que se obtienen son

$$i \frac{da_p}{dt} = E_p a_p , \quad (3.2.41a)$$

$$i \frac{da_p^\dagger}{dt} = -E_p a_p^\dagger . \quad (3.2.41b)$$

La solución a estas ecuaciones es trivial,

$$a_p^H(t) = a_p(0) e^{iE_p t} , \quad (3.2.42a)$$

$$a_p^{H\dagger}(t) = a_p^\dagger(0) e^{-iE_p t} , \quad (3.2.42b)$$

donde $a_p^\dagger(0)$ y $a_p(0)$ coinciden exactamente con los operadores de creación y destrucción en la imagen de Schrödinger que hemos estudiado hasta ahora. Así, por tanto, podemos escribir los operadores de campo en imagen de Heisenberg de la forma siguiente,

$$\phi^H(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \{ a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \} , \quad (3.2.43a)$$

$$\Pi^H(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} (-i) \{ a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \} . \quad (3.2.43b)$$

Otro resultado importante que se puede demostrar fácilmente es

$$\phi(x) = e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} \phi(0) e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} , \quad (3.2.44)$$

es decir, el operador momento lineal, \mathbf{P} (que no es igual al momento conjugado, Π), continúa teniendo la interpretación de generador de las translaciones.

3.3. Propagadores de Klein-Gordon

3.3.1. Microcausalidad

La amplitud de probabilidad de que una partícula se propage de $y = (t_y, \mathbf{y})$ a $x = (t_x, \mathbf{x})$ viene dada por

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} . \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Esta última integral se puede resolver de forma aproximada mediante el método de la máxima pendiente. Para una separación de tipo espacial, $(x-y)^2 < 0$, y para una gran separación radial, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, se obtiene

$$D(x-y) \approx e^{-mcr/\hbar} , \quad (3.3.2)$$

que nunca se anula de forma exacta. Por lo tanto, las partículas pueden viajar a velocidades superiores a la de la luz. Sin embargo, esto no viola el principio de causalidad, ya que no implica la posibilidad de transmitir información a velocidades hiperlumínicas.

La condición que debemos pedir para garantizar la causalidad es que el hecho de efectuar dos acciones en dos puntos del espacio tiempo, x e y , separados por un vector de tipo espacial, no se afecten mutuamente; dicho de otra forma, que conmuten,

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 , \quad \text{si } (x-y)^2 < 0 . \quad (3.3.3)$$

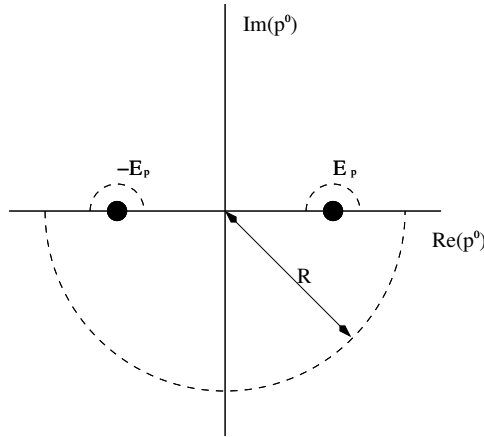


Figura 3.1: Circuito de integración para el propagador retardado. El radio se debe hacer tender a infinito, $R \rightarrow \infty$.

El cálculo para comprobar que se cumple la condición (3.3.3) es trivial,

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}, a_k e^{-ik \cdot y} + a_k^\dagger e^{ik \cdot y} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

dado que la separación $x - y$ es un cuadrivector de tipo espacio, podemos realizar un cambio de sistema de referencia tal que $x^0 - y^0 = 0$, y dado que integramos a todo el espacio de trimomentos, los dos términos de la ecuación anterior se cancelan exactamente.

Otros resultados que pueden ser demostrados de forma sencilla, y nos serán de utilidad posteriormente, son los siguientes,

$$\partial_0 [\phi(x^0, \mathbf{x}), \phi(0, \mathbf{0})] \Big|_{x^0=0} = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (3.3.5)$$

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) [\phi(x), \phi(y)] = 0. \quad (3.3.6)$$

3.3.2. Propagador retardado

Volvamos a considerar el conmutador del operador campo en dos puntos diferentes, ahora considerando una separación arbitraria, no necesariamente de tipo espacio,

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{(2E_p)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{1}{(-2E_p)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_p} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Si consideramos $x^0 > y^0$, para simplificar esta igualdad podemos hacer uso de la igualdad

$$\int dp^0 \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} = (-1)2\pi i \left\{ \frac{1}{(2E_p)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{1}{(-2E_p)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_p} \right\}, \quad (3.3.8)$$

donde la integración se hace sobre el contorno de la figura 3.1. El factor (-1) se debe incluir ya que la integración se hace en el sentido de las agujas del reloj. En el momento de calcular los polos hemos tenido en cuenta que $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.

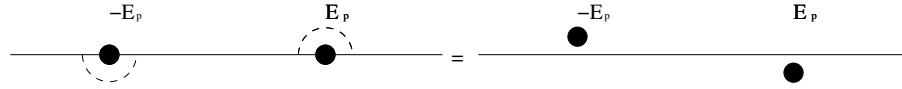


Figura 3.2: Preescripción para el paso de los polos en el propagador de Feynman.

En el caso $y^0 > x^0$, el circuito de integración debe cerrarse por el semiplano superior, y por lo tanto no contiene ningún polo, por lo que la integración da cero. Esto nos permite definir el *propagador retardado*,

$$D_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle . \quad (3.3.9)$$

Para comprobar que el propagador es, en efecto, una función de Green retardada asociada a la ecuación de Klein-Gordon, debemos comprobar que dicho propagador cumple la ecuación de Klein-Gordon inhomogénea, donde el término inhomogéneo es proporcional a la delta de Dirac en todas las variables,

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) D_R(x - y) &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \left(\partial^\mu \partial_\mu \theta(x^0 - y^0) \right) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &\quad + 2 \left(\partial^\mu \theta(x^0 - y^0) \right) \left(\partial_\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \right) \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0) \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle , \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

el último término de la segunda igualdad es nulo en virtud de la ecuación (3.3.6). Teniendo en cuenta que la derivada de la función paso de Heaviside es la delta de Dirac, la ecuación (3.3.10) se escribe de la forma

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) D_R(x - y) &= \left(\partial^0 \delta(x^0 - y^0) \right) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + 2 \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\partial_0 \phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\Pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0) (-i) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

finalmente obtenemos el resultado deseado,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) D_R(x - y) = -i \delta^{(4)}(x - y) . \quad (3.3.12)$$

El hecho de que el propagador retardado corresponda a la función de Green retardada del sistema nos permite calcularlo empleando toda la potencia del método de las funciones de Green. En particular, el propagador retardado se puede calcular realizando la transformada de Fourier de la ecuación de Klein-Gordon para el propagador, ec. (3.3.12).

3.3.3. Propagador de Feynman

El propagador de Feynman se define de la misma forma que el propagador retardado, pero con un convenio para el circuito de integración diferente. Concretamente, para el propagador de Feynman utilizaremos el circuito de la figura 3.2. Esta forma de pasar los polos del integrando es equivalente a la preescripción $+i\varepsilon$, es decir

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp \left\{ -ip \cdot (x - y) \right\} . \quad (3.3.13)$$

Para que la integral curvilínea no contribuya, para $x^0 > y^0$ debemos cerrar el circuito de integración por debajo, ver figura 3.3(a), y la integral que nos queda es la misma que da $D(x - y)$,

$$D_F(x - y) = D(x - y) , \quad \text{si } x^0 > y^0 . \quad (3.3.14a)$$

En cambio, para $x^0 < y^0$, debemos cerrar la integración por el semiplano superior, ver figura 3.3(b), y tenemos un cambio de signo en el argumento de la integral, por tanto

$$D_F(x - y) = D(y - x) , \quad \text{si } x^0 < y^0 . \quad (3.3.14b)$$

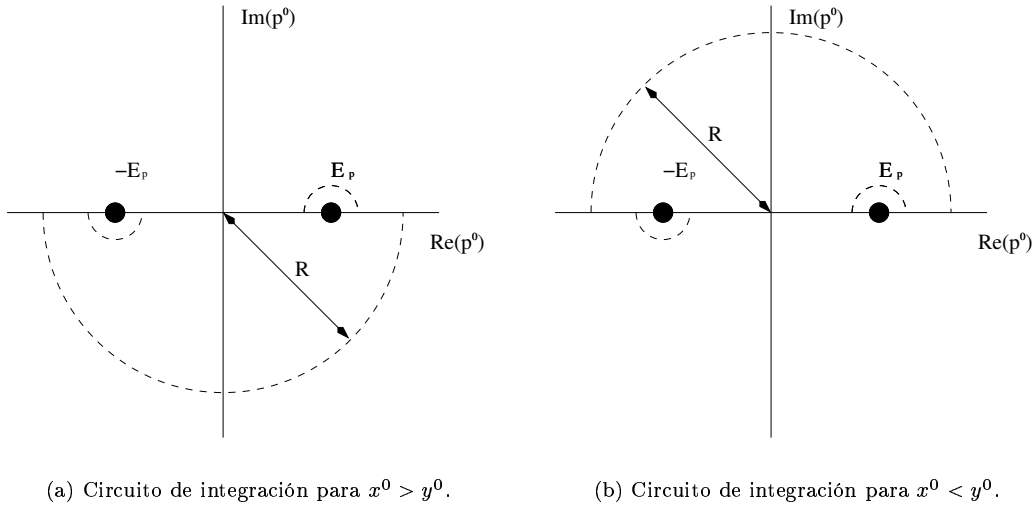


Figura 3.3: Circuitos de integración para el propagador de Feynman.

Resumiendo las ecuaciones (3.3.14) tenemos

$$\begin{aligned}
 D_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) D(x - y) + \theta(y^0 - x^0) D(y - x) \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Podemos simplificar esta última expresión mediante el *operador de ordenación temporal*,

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle . \tag{3.3.16}$$

Capítulo 4

Teorías con interacción

Hasta el momento tan solo hemos considerado teorías sin interacción. No obstante, el mundo real esta repleto de circunstancias de interés donde se producen interacciones entre las diferentes partículas y campos. Así, pues, debemos de ampliar nuestra teoría para incluir los sistemas en interacción.

Los sistemas en interacción se describen a partir del sistema libre, añadiendo los términos de interacción correspondientes al lagrangiano, es decir

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{inter.}} . \quad (4.1)$$

En esta lección consideraremos tan sólo interacciones del campo escalar real, es decir, donde $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ es el lagrangiano de Klein-Gordon, ec. (3.2.1).

En primer lugar, estudiaremos el ejemplo más sencillo de interacción: una fuente externa clásica. Este sistema puede ser resuelto de forma exacta sin grandes complicaciones. Posteriormente pasaremos a estudiar los términos de autointeracción de los campos consigo mismos. Para ello estudiaremos un ejemplo concreto de teoría en interacción, la teoría $\lambda\phi^4$. Este tipo de interacciones son mucho más complicadas y no pueden ser resueltas de forma exacta, sino que requieren de técnicas perturbativas.

Los cálculos perturbativos se pueden sintetizar mediante unas reglas diagramáticas ideadas por Feynman. En este capítulo enunciaremos y demostraremos de forma las reglas de Feynman para la teoría escalar $\lambda\phi^4$.

4.1. Interacción con una fuente clásica

En esta sección estudiaremos el campo escalar de Klein-Gordon en interacción con una fuente externa, $\mathcal{L}_{\text{inter.}} = j(x)\phi(x)$, es decir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + j(x)\phi(x) . \quad (4.1.1)$$

Este sistema corresponde a la ecuación de Klein-Gordon con un término inhomogéneo,

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = j(x) . \quad (4.1.2)$$

Dado que conocemos la función de Green retardada de la ecuación de Klein-Gordon, $D_R(x-y)$, podemos escribir de forma inmediata la solución general de la ecuación (4.1.2),

$$\phi(x) = \phi_0(x) + i \int d^4y D_R(x-y)j(y) , \quad (4.1.3)$$

donde ahora $\phi_0(x)$ representa el campo libre, ec. (3.3.4). Supongamos que la fuente actúa tan sólo un tiempo finito, es decir, que $j(x) \rightarrow 0$ cuando $x^0 \rightarrow \pm\infty$. Sustituyendo la expresión para $D_R(x-y)$, ecs. (3.3.9) y (3.3.7),

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \\ & + i \int d^4y \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \theta(x^0 - y^0) \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right\} j(y) . \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Si tomamos el límite $x^0 \rightarrow +\infty$, la función paso siempre tomará el valor +1, y podemos reescribir la ecuación (4.1.4) en términos de la transformada de Fourier de $j(y)$, cosa que nos permite eliminar la integral implícita sobre y ,

$$\phi(x) \xrightarrow{x^0 \rightarrow +\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left\{ \left(a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) \right) e^{-ip \cdot x} + \left(a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}^*(p) \right) e^{ip \cdot x} \right\} . \quad (4.1.5)$$

Tal i como vemos, la ecuación (4.1.5) sugiere que para incorporar la interacción tan sólo es necesario realizar la substitución

$$a_p \longrightarrow a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) , \quad (4.1.6a)$$

$$a_p^\dagger \longrightarrow a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}^*(p) . \quad (4.1.6b)$$

Aplicando la substitución (4.1.6) al hamiltoniano renormalizado, ec. (3.2.22), obtenemos

$$: H : = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p \left(a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}^*(p) \right) \left(a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) \right) . \quad (4.1.7)$$

Debemos notar que, con este nuevo hamiltoniano, el estado vacío tiene cierta energía no nula,

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p \frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2 \Big|_{p^2=m^2} . \quad (4.1.8)$$

La ecuación (4.1.8) nos permite interpretar la cantidad

$$\frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2 \quad (4.1.9)$$

como la densidad de probabilidad de que la fuente clásica $j(x)$ cree una partícula de energía E_p y momento \mathbf{p} . Por tanto, el número total de partículas creadas por la fuente se puede escribir como

$$N = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2 \Big|_{p^2=m^2} . \quad (4.1.10)$$

4.2. Interacción de campos

4.2.1. Introducción

Tal y como hemos comentado con anterioridad, en este capítulo consideraremos lagrangianos con términos de interacción, cogiendo como teoría modelo el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) . \quad (4.2.1)$$

En unidades naturales, $\hbar = c = 1$, las dimensiones de las diferentes magnitudes son

$$[S] = 1 , \quad (4.2.2a)$$

$$[\mathcal{L}] = L^{-4} = M^4 , \quad (4.2.2b)$$

$$[\phi] = L^{-2} = M^2 , \quad (4.2.2c)$$

$$[\lambda] = 1 . \quad (4.2.2d)$$

La ecuación (4.2.2a) viene del hecho que \hbar tiene dimensiones de acción, y hemos elegido $\hbar = 1$. La ecuación (4.2.2b) se deduce del hecho que la acción es la integral a todo el espacio de la densidad de lagrangiana,

\mathcal{L} , y el elemento de integración tiene dimensiones de $L^4 = M^{-4}$. La ecuación (4.2.2c) se deduce de requerir homogeneidad dimensional en los términos cinéticos y de masas del lagrangiano, donde se ha de tener en cuenta que $[\partial_\mu] = L^{-1} = M$. Por último, la ecuación (4.2.2d) se deduce de (4.2.2c), ya que el término $\lambda\phi^4$ debe tener las mismas dimensiones que la densidad de lagrangiana, ec. (4.2.2b).

Ya hemos mencionado que, en este capítulo, tan sólo consideraremos el lagrangiano de interacción $\lambda\phi^4(x)$, pero existen muchos otros ejemplos de lagrangianos de interacción, que pueden ser estudiados utilizando básicamente los mismos métodos que consideraremos en este capítulo. Algunos ejemplos de interés son

$$\mathcal{L}_{\text{spin}} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi , \quad (4.2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{E-M}} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (4.2.4)$$

El *argumento de renormalización* nos asegura que las constantes de acoplamiento que acompañan los diferentes términos de interacción no pueden tener una dimensionalidad con potencias negativas de masa. En los cálculos, deberemos considerar elementos de matriz del tipo

$$\lambda = \langle \psi | H_{\text{int}} | \psi \rangle . \quad (4.2.5)$$

En muchas ocasiones deberemos acotar el momento introduciendo un *cut-off*, Λ . Para obtener cantidades adimensionales, como la amplitud de probabilidad, obtendremos términos del estilo

$$\lambda \Lambda^\alpha , \quad (4.2.6)$$

que tan sólo serán finitas en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ si el exponente es negativo, $\alpha \leq 0$. Por argumentos dimensionales, dado que $[\Lambda] = M$, el exponente α será del mismo valor, pero signo contrario, que la dimensionalidad de la constante de acoplamiento, $[\lambda] = M^{-\alpha}$. Así, pues, la condición $\alpha \leq 0$ se traduce en que la dimensionalidad de las constantes de acoplamiento no puede contener potencias negativas de M .

4.2.2. Imagen de interacción

En las situaciones en que un hamiltoniano general se puede descomponer en una parte libre (resoluble) y en una parte de interacción, que es pequeña respecto de la libre,

$$H = H_0 + H_{\text{int}} , \quad (4.2.7)$$

resulta útil definir una nueva imagen, la *imagen de interacción*, también llamada de Tomonaga o de Dirac. En esta nueva imagen de la mecánica cuántica, el operador unitario que define la imagen es simplemente el operador de evolución asociado con la parte libre de la teoría,

$$U = e^{iH_0^s(t-t_0)} . \quad (4.2.8)$$

Siguiendo los métodos de la sección 3.1 se puede ver que las ecuaciones dinámicas para los operadores y estados son las siguientes,

$$i\partial_t |\alpha(t)\rangle_I = H_{\text{int}}^I |\alpha(t)\rangle_I , \quad (4.2.9)$$

$$i\partial_t O^I(t) = [O^I(t), H_0^I] , \quad (4.2.10)$$

es decir, los operadores de la teoría evolucionan con el hamiltoniano libre, dejando para los estados tan sólo la evolución con el término de interacción.

En el apartado 3.2.3 ya habíamos encontrado la expresión de los operadores de creación, destrucción, y de campo en la imagen de Heisenberg libre, que corresponde a nuestra imagen de interacción. Recordemos que teníamos

$$a_p^I = U a_p U^\dagger = a_p e^{-iH_0(t-t_0)} , \quad (4.2.11a)$$

$$a_p^{I\dagger} = U a_p^\dagger U^\dagger = e^{iH_0(t-t_0)} a_p^\dagger , \quad (4.2.11b)$$

$$\phi^I(x) = U \phi(x) U^\dagger = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \{ a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \} \quad (4.2.11c)$$

Consideramos el operador que relaciona las imágenes de Heisemberg con la de interacción, que no es más que el operador de evolución para los estados en imagen de interacción,

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} , \quad (4.2.12)$$

tal que

$$|\psi\rangle^I = U(t, t_0) |\psi\rangle^H , \quad (4.2.13a)$$

$$O^I = U(t, t_0) O^H U^\dagger(t, t_0) , \quad (4.2.13b)$$

o bien, invirtiendo las relaciones,

$$|\psi\rangle^H = U^\dagger |\psi\rangle^I , \quad (4.2.14a)$$

$$O^H = U^\dagger(t, t_0) O^I U(t, t_0) . \quad (4.2.14b)$$

Consideramos la derivada temporal del operador de evolución $U(t, t_0)$,

$$\begin{aligned} i\partial_t U(t, t_0) &= ie^{iH_0(t-t_0)} iH_0 e^{-iH(t-t_0)} + ie^{iH_0(t-t_0)} (-i) H(t-t_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}}^S e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_{\text{int}}^I U(t, t_0) , \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la definición de los operadores en imagen de interacción. De ahora en adelante, utilizaremos la notación H_{int} para el hamiltoniano de interacción en imagen de interacción. Así, pues, la ecuación diferencial que cumple el operador $U(t, t_0)$ es

$$i\partial_t U(t, t_0) = H_{\text{int}} U(t, t_0) . \quad (4.2.16)$$

La solución de la ecuación (4.2.16) se puede expresar en términos de una serie de Neumann,

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int}}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) H_{\text{int}}(t_3) + \dots . \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

La serie de Neumann puede modificarse de forma que todas las integrales tengan el límite superior igual mediante el uso del operador de ordenación temporal,

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int}}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2)) \\ &\quad + \frac{(-i)^3}{6} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 , T(H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) H_{\text{int}}(t_3)) + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T(H_{\text{int}}(t_1) \dots H_{\text{int}}(t_n)) . \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Formalmente, la serie anterior se puede representar como el orden temporal de la exponencial, es decir

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t') \right\} \right] . \quad (4.2.19)$$

Otra expresión posible para el operador $U(t, t_0)$ es

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} . \quad (4.2.20)$$

La demostración de que la expresión (4.2.20) es equivalente a las anteriores se realiza comprobando que también cumple la ecuación diferencial (4.2.16). Mediante esta nueva expresión, resulta trivial demostrar las propiedades siguientes,

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) , \quad (4.2.21)$$

$$U(t_1, t_3)U^\dagger(t_2, t_3) = U(t_1, t_2) . \quad (4.2.22)$$

4.3. Correladores. Ecuación de Gell-Mann–Low

En una teoría con interacción, el estado fundamental (vacío) no tiene por qué coincidir con el de la teoría libre. Llamaremos $|\Omega\rangle$ al nuevo estado fundamental del hamiltoniano completo, con energía $E_0 = \langle\Omega|H|\Omega\rangle$; mientras que continuaremos reservando $|0\rangle$ para el estado fundamental del hamiltoniano libre. Llamamos *correlador o función de correlación* al valor esperado de la ordenación temporal de un producto de operadores de campo,

$$\langle\Omega|T(\phi^H(x)\phi^H(y)\cdots)|\Omega\rangle . \quad (4.3.1)$$

Sean $|n\rangle$ los estados propios del hamiltoniano completo, con $|n=0\rangle = |\Omega\rangle$. Consideramos la evolución del vacío libre por el hamiltoniano completo durante un tiempo T ,

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle , \quad (4.3.2)$$

donde, si el término de interacción es pequeño (condición necesaria para que la teoría de perturbaciones tenga sentido), podemos considerar que $\langle\Omega|0\rangle \neq 0$. La ecuación (4.3.2) nos enseña que, si el exponente fuera real, podríamos obtener el vacío de la teoría de interacción a partir del libre, simplemente considerando el límite $T \rightarrow \infty$. Otra forma es dotar de una pequeña parte imaginaria, negativa, al tiempo T ; es decir,

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-iHT}|0\rangle}{e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle} . \quad (4.3.3)$$

Dado que tomamos el límite al infinito, el resultado no se verá afectado si realizamos el cambio $T \rightarrow T + t_0$ en el numerador. Además, dado que $H_0|0\rangle = 0$, podemos añadir cualquier función de H_0 multiplicando la expresión anterior. Es decir, tenemos

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)}e^{-iH_0(-T-t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} , \quad (4.3.4)$$

comparando esta última ecuación con la expresión (4.2.20) podemos escribir el vacío del hamiltoniano completo en términos del operador $U(t, t')$. Siguiendo un procedimiento análogo (o tomando el complejo conjugado de la ecuación anterior) podemos escribir también el bra, $\langle\Omega|$. Los resultados finales son

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{U(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} , \quad (4.3.5a)$$

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0|U(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)}\langle 0|\Omega\rangle} . \quad (4.3.5b)$$

Debe notarse que todas las magnitudes que aparecen en los miembros de la derecha de las ecuaciones (4.3.5) son conocidos y pueden calcularse.

A modo de ejemplo, aplicaremos las ecuaciones (4.3.13) para el cálculo del correlador a dos puntos.

Ejemplo 4.3.1 (Correlador a dos puntos) Consideramos el correlador a dos puntos, con $x^0 > y^0 > t_0$,

$$\langle\Omega|T(\phi^H(x)\phi^H(y))|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi^H(x)\phi^H(y)|\Omega\rangle . \quad (4.3.6)$$

Podemos expresar los campos en la imagen de interacción recordando la ecuación (4.2.14b),

$$\phi^H(x) = U^\dagger(x^0, t_0)\phi(x)U(x^0, t_0) , \quad (4.3.7)$$

donde, de ahora en adelante, $\phi(x)$ representa la imagen de interacción. Por lo tanto, por substitución directa, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T(\phi^H(x)\phi^H(y)) | \Omega \rangle &= \frac{\langle 0 | U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \phi(x) U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi(y) U(y^0, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle^* e^{-iE_0(t_0+T)} \langle \Omega | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | U(T, x^0) \phi(x) U(x^0, y^0) \phi(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0 2T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

donde hemos usado la propiedad (4.2.22). Podemos calcular el denominador teniendo en cuenta que $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$, lo que nos da la condición

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0 2T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2} = 1, \quad (4.3.9)$$

con lo que, finalmente, tenemos

$$\langle \Omega | T(\phi^H(x)\phi^H(y)) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | U(T, x^0) \phi(x) U(x^0, y^0) \phi(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle}. \quad (4.3.10)$$

En general, sin realizar ninguna suposición sobre el orden temporal, y teniendo en cuenta la ecuación (4.2.19), el numerador de la ecuación (4.3.10) toma la forma

$$\left\langle 0 \left| T \left\{ e^{-i \int_{x^0}^T dt' H_{int}(t')} \phi(x) \exp \left(\int_{y^0}^{x^0} dt' H_{int}(t') \right) \phi(y) e^{-i \int_{-T}^{y^0} dt' H_{int}(t')} \right\} \right| 0 \right\rangle, \quad (4.3.11)$$

pero en el interior del operador de ordenación temporal, el orden de los operadores no importa, por lo que podemos ajuntar todas las integrales. El resultado final es

$$\langle \Omega | T(\phi^H(x)\phi^H(y)) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) \exp \left(-i \int_{-T}^T dt' H_{int}(t') \right) \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-i \int_{-T}^T dt' H_{int}(t')} | 0 \rangle}. \quad (4.3.12)$$

En general, la función de correlación de n puntos se puede escribir de la forma

$$\langle \Omega | T(\phi^H(x_1) \cdots \phi^H(x_n)) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp \left(-i \int_{-T}^T dt' H_{int}(t') \right) \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-i \int_{-T}^T dt' H_{int}(t')} | 0 \rangle}, \quad (4.3.13)$$

ésta es la ecuación de Gell-Mann-Low.

4.4. Teorema de Wick

Las funciones de correlación guardan toda la información de la teoría; en particular, son las que nos proporcionan la conexión con las amplitudes de scattering que pueden medir los experimentales. Por lo tanto, deberemos considerar en un gran número de ocasiones el valor esperado en el vacío libre de un producto de operadores de campo, como los que aparecen en la ecuación de Gell-Mann-Low. En ese sentido, nos será de gran utilidad disponer de una forma sistemática de poder calcular dichos valores esperados: el teorema de Wick. En esta sección enunciaremos y ejemplificaremos dicho teorema. Por último, realizaremos la demostración formal del mismo.

4.4.1. Enunciado y ejemplos

El teorema de Wick establece la siguiente igualdad

$$T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) = N(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) + \text{todas las contracciones}), \quad (4.4.1)$$

donde N indica orden normal¹. La contracción de dos operadores es equivalente a realizar su conmutador, veamoslo de forma constructiva.

Recordemos que los operadores de campo se pueden descomponer en sus partes de frecuencia positiva y negativa,

$$\phi(x) = \phi^-(x) + \phi^+(x) , \quad (4.4.2a)$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_p} , \quad (4.4.2b)$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_p} , \quad (4.4.2c)$$

debido a la forma en que estos operadores contienen los operadores de creación y destrucción, ambos aniquilan al vacío por uno de los dos lados,

$$\phi^+ |0\rangle = 0 , \quad (4.4.3a)$$

$$\langle 0 | \phi^- = 0 . \quad (4.4.3b)$$

Consideramos el producto de dos campos, para $x^0 > y^0$,

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] . \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Recordemos que el orden normal consiste en situar a la derecha los operadores de creación, y a la izquierda los de destrucción. Traducido a operadores de campo, esto significa pasar a la derecha los operadores ϕ^- y a la izquierda los ϕ^+ , por lo tanto, tenemos

$$T(\phi(x)\phi(y)) = N(\phi(x)\phi(y)) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] . \quad (4.4.5)$$

En el caso de que hubiéramos escogido el orden temporal al revés, $y^0 > x^0$, el conmutador aparecería al revés. Para tener en cuenta este cambio, definimos la *contracción de dos campos* de la forma siguiente

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{si } x^0 > y^0 , \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{si } x^0 < y^0 . \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Pero recordemos que precisamente el conmutador era la definición del propagador de Feynman, con la prescripción correcta para el paso de los polos, con lo cual tenemos

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x - y) . \quad (4.4.7)$$

Volvamos al teorema de Wick. Debemos sumar todas las contracciones posibles, es decir, tendremos términos con una contracción, con dos, etc. Veamos los dos ejemplos más sencillos. Para simplificar la escritura, utilizaremos la notación $\phi_i = \phi(x_i)$.

Ejemplo 4.4.1 (Teorema de Wick con tres campos) *La aplicación del teorema de Wick a tres campos es prácticamente trivial, en este caso solo podemos tener términos con una o ninguna contracción,*

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\phi_3) &= N(\phi_1\phi_2\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3 + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3} + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3) \\ &= :\phi_1\phi_2\phi_3: + D_F(x_1 - x_2)\phi_3 + D_F(x_2 - x_3)\phi_1 + D_F(x_1 - x_3)\phi_2 . \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

¹En capítulos anteriores habíamos utilizado la notación $::$ para el orden normal. A partir de ahora, tomaremos ambas notaciones como sinónimas, reservando la notación de dos puntos para casos en que la expresión a ordenar sea relativamente pequeña.

Ejemplo 4.4.2 (Teorema de Wick con cuatro campos) En este caso, tendremos términos con cero, una y dos contracciones,

$$\begin{aligned}
T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) &= N\left(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right. \\
&\quad \left. + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right) \\
&= :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: \\
&\quad + D_F(x_1 - x_2):\phi_3\phi_4: + D_F(x_1 - x_3):\phi_2\phi_4: + D_F(x_1 - x_4):\phi_2\phi_3: \\
&\quad + D_F(x_2 - x_3):\phi_1\phi_4: + D_F(x_2 - x_4):\phi_1\phi_3: + D_F(x_3 - x_4):\phi_1\phi_2: \\
&\quad + D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) .
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Dado que a menudo nos interesará tomar el valor esperado sobre el vacío libre, y el valor esperado de cualquier ordenación normal siempre es cero, tan sólo contribuirán aquellos términos donde todos los campos estén contraídos.

4.4.2. Demostración del teorema de Wick

Vamos a proceder por inducción. Para un sólo campo, dado que no se pueden formar contracciones y las ordenaciones normal y temporal son irrelevantes, el teorema se cumple trivialmente. Para dos campos también se cumple, ya que es el caso que hemos estudiado para definir las contracciones. Supongamos, pues, que el teorema es válido para $m - 1$ campos, y vamos a demostrar que, entonces, también lo es para m campos; de esta forma el teorema quedará demostrado para cualquier número de campos.

Consideremos la ordenación temporal de m campos y apliquemos el teorema de Wick para $m - 1$ de ellos, ya que sabemos que en este caso se cumple;

$$T(\phi_1\phi_2 \cdots \phi_m) = \phi_1 N\left(\overbrace{\phi_2 \cdots \phi_m}^W + \text{contracciones sin } \phi_1\right) . \tag{4.4.10}$$

El siguiente paso consiste en separar las componentes de frecuencias positivas y negativas de ϕ_1 , y conmutar los términos de forma que quede de nuevo el orden normal. Para facilitar la notación, llamamos W a los términos que aparecen dentro del orden normal en la ecuación (4.4.10). El resultado que se obtiene es

$$T(\phi_1\phi_2 \cdots \phi_m) = N(\phi_1^- W) + N(W \phi_1^+) + [\phi_1^+, N(W)] . \tag{4.4.11}$$

Consideraremos ahora los términos sin ninguna contracción,

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ N(\phi_2 \cdots \phi_m) &= N(\phi_2 \cdots \phi_m) \phi_1^+ + [\phi_1^+, N(\phi_2 \cdots \phi_m)] \\
&= N(\phi_2 \cdots \phi_m \phi_1^+ + [\phi_1^+, \phi_2]\phi_3 \cdots \phi_m + \cdots + \phi_2 \cdots \phi_{m-1}[\phi_1^+, \phi_m]) ,
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

donde hemos utilizado la conocida propiedad del conmutador de un producto,

$$[A, B_1 B_2 \cdots B_m] = [A, B_1] B_2 \cdots B_m + B_1 [A, B_2] B_3 \cdots B_m + \cdots + B_1 B_2 \cdots B_{m-1} [A, B_m] . \tag{4.4.13}$$

Dado que todos los ϕ^+ conmutan entre si, podemos substituir todos los ϕ_i que aparecen en los conmutadores del segundo miembro de la ecuación (4.4.12), con sus respectivas partes ϕ^+ ,

$$\phi_1^+ N(\phi_2 \cdots \phi_m) = N(\phi_2 \cdots \phi_m \phi_1^+ + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3 \cdots \phi_m + \cdots + \phi_2 \cdots \phi_{m-1}[\phi_1^+, \phi_m^-]) , \tag{4.4.14}$$

y podemos asociar estos conmutadores con la definición de la contracción,

$$\phi_1^+ N(\phi_2 \cdots \phi_m) = N(\phi_2 \cdots \phi_m \phi_1^+ + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3 \cdots \phi_m} + \cdots + \overbrace{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_{m-1}\phi_m}) . \tag{4.4.15}$$

El primer término del segundo término de la ecuación (4.4.11), y el de la ecuación (4.4.15) obtenemos el término con contracciones completo. Los restantes términos de la ecuación (4.4.15) corresponden a todas las contracciones con ϕ_1 .

El mismo procedimiento se ha de repetir con todos los términos con una, dos, etc. contracciones. En todos los casos, obtenemos un término que no añade contracciones más todos los términos con contracciones de ϕ_1 , que son justamente los que nos faltan para completar el teorema de Wick con m campos. Esto completa la demostración del teorema. \square

4.5. Representación diagramática y teoría de perturbaciones

El cálculo de elementos de matriz sobre el vacío libre, utilizando el teorema de Wick, es tan sistemático que Feynman ideó un método de hallar su solución utilizando tan sólo una representación diagramática de cada término. Consideremos, por ejemplo, el valor esperado de cuatro operadores campo, cuya expansión según el teorema de Wick viene dada por la ecuación (4.4.9),

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \\ &= \begin{array}{c} x^3 \quad x^4 \\ \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ x^1 \quad x^2 \end{array} + \begin{array}{c} x^3 \quad x^4 \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ x^1 \quad x^2 \end{array} + \begin{array}{c} x^3 \quad x^4 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ x^1 \quad x^2 \end{array}, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Podemos interpretar cada línea de los diagramas como la trayectoria de una partícula que se crea en un extremo y se destruye en el otro.

Sin embargo, a menudo nos interesa el cálculo de las funciones de correlación, es decir, de los valores esperados sobre el vacío de la teoría con interacción; pero las técnicas que hemos desarrollado tan sólo son útiles para el vacío libre: debemos utilizar la ecuación de Gell-Mann-Low, ec. (4.3.13).

Si el término de interacción es pequeño, se puede tratar como una perturbación. De esta forma, podemos desarrollar las exponenciales que aparecen en la ecuación de Gell-Mann-Low, y realizar el cálculo orden a orden de forma perturbativa,

$$\langle \Omega | T(\phi_1 \dots) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \left(1 - i \int dt' H_{\text{int}}(t') + \frac{i^2}{2!} \int dt' \int dt'' H_{\text{int}}(t') H_{\text{int}}(t'') + \dots \right) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(1 - i \int dt' H_{\text{int}}(t') + \frac{i^2}{2!} \int dt' \int dt'' H_{\text{int}}(t') H_{\text{int}}(t'') + \dots \right) | 0 \rangle}, \quad (4.5.2)$$

donde se debe tener en cuenta que las integrales se hacen entre $-T$ y T , con $T \rightarrow \infty(1 - \varepsilon)$. En esta sección nos dedicaremos al cálculo del numerador de la ecuación (4.5.2). El denominador se calculará de la misma forma, salvo que en este caso no tendremos puntos externos. En posteriores secciones nos preocuparemos de ajuntar los resultados de numerador y denominador.

El orden cero, o *nivel árbol*, donde se aproxima la exponencial por la identidad, es igual a la contribución de los correladores libres. Vamos a ver un ejemplo de cálculo de contribuciones a primer orden, o a orden de *un loop*. Para ello, utilizaremos una teoría de prueba el hamiltoniano de interacción $\lambda \phi^4$,

$$H_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \int d^3 \mathbf{z} \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z), \quad (4.5.3)$$

dado que en la ecuación (4.5.2) el hamiltoniano de interacción siempre aparece integrado respecto del tiempo, podemos escribirlo siempre como una integral a todo el espacio tiempo,

$$\int dt H_{\text{int}}(t) = \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z). \quad (4.5.4)$$

Calcularemos en primer lugar la contribución hasta primer orden a la función de correlación de dos puntos. El numerador de la ecuación (4.5.2) es de la forma,

$$I_1 := \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle - \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)) | 0 \rangle . \quad (4.5.5)$$

Como el teorema de Wick implica orden normal, sólo contribuirán los términos con todos los campos contraídos. Dada la estructura de la ecuación anterior, solo tenemos dos tipos de contracciones, cuando los campos externos, $\phi(x)$ y $\phi(y)$ están contraídos entre si (hay tres contribuciones de este tipo, correspondientes a las tres formas de contraer entre si los cuatro campos internos), y cuando están contraídos con campos externos (hay $4 \times 3 = 12$ formas de obtener esta contribución). Es decir, tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle 0 | \overline{\phi(x)\phi(y)} | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left\{ 3 \langle 0 | \overline{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} | 0 \rangle + 12 \langle 0 | \overline{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} | 0 \rangle \right\} \\ &= D_F(x-y) - \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left\{ 3 D_F(x-y) D_F(0) D_F(0) + 12 D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(0) \right\} , \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

o bien, utilizando los diagramas de Feynman,

$$I_1 = x \bullet \text{---} y + x \bullet \text{---} y \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} + x \bullet \text{---} \begin{array}{c} \bigcirc \\ z \end{array} \text{---} y \quad (4.5.7)$$

Como vemos, los diagramas llevan implícita la integración respecto los puntos internos, así como el factor numérico debido a las diferentes formas de contraer los diferentes puntos.

4.6. Las reglas de Feynman

4.6.1. Reglas de Feynman en espacio de posiciones

Cada diagrama de Feynman lleva asociado un valor. Las recetas que nos permiten obtener dicho valor a partir del diagrama se conocen como *reglas de Feynman*. Vamos a derivarlas a partir del cálculo explícito de un diagrama a tercer orden, o *a tres loops*. En concreto, elegimos el diagrama representado por la contracción

$$\frac{1}{3!} \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right)^3 \int d^4 z \int d^4 w \int d^4 u \left\langle 0 \left| \overline{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(w)\phi(w)\phi(w)\phi(w)\phi(u)\phi(u)\phi(u)\phi(u)} \right| 0 \right\rangle , \quad (4.6.1)$$

que corresponde al diagrama

$$x \bullet \text{---} \begin{array}{c} \bigcirc \\ z \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bigcirc \\ u \end{array} \text{---} y \quad (4.6.2)$$

El número de contracciones que llevan a un diagrama equivalente al anterior es

- intercambio de los tres vértices; $3! = 6$,
- permutaciones en z , $4!/2! = 12$,
- permutaciones en w , $4! = 24$,
- permutaciones en u , $4!/2! = 12$,

de Feynman se simplifican considerablemente. Uno de los motivos es la estructura del propagador de Feynman, ec. (3.3.13),

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp \left\{ -ip \cdot (x-y) \right\}, \quad (4.6.7)$$

que recuerda a la transformada de Fourier de

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (4.6.8)$$

Para derivar las reglas de Feynman en el espacio de momentos consideraremos el siguiente diagrama con cuatro puntos externos,

$$V_4 = \text{Diagrama} \quad , \quad (4.6.9)$$

cuya contribución, utilizando las reglas de Feynman que conocemos, es

$$\begin{aligned} V_4 &= -i\lambda \int d^4 z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(u-z) D_F(w-z) \\ &= -i\lambda \int d^4 z, \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right)^4 \frac{e^{i(p_1+p_2+p_3+p_4) \cdot z} e^{-ip_1 \cdot u} e^{-ip_1 \cdot w} e^{-ip_1 \cdot x} e^{-ip_1 \cdot y}}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon) (p_2^2 - m^2 + i\varepsilon) (p_3^2 - m^2 + i\varepsilon) (p_4^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

siempre podemos realizar la integración en z , que nos dará una delta de Dirac de conservación del momento total. De esta forma, en todos los vértices la integración se puede substituir por las leyes de conservación en el espacio de momentos. En el caso de tener loops, las integrales respecto de sus momentos permanecen. Sin embargo, en algunas ocasiones las mismas deltas de conservación pueden determinar parte de los momentos en los loops. Así, pues, las reglas de Feynman en espacio de momentos son:

1. Por cada línea, un propagador en espacio de momentos,

$$x \bullet \text{---} \bullet y = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (4.6.11)$$

2. Por cada vértice,

$$\text{Diagrama de un vértice central z con cuatro líneas que se cruzan} = (-i\lambda). \quad (4.6.12)$$

3. Por cada punto externo,

$$x \bullet \text{---} \text{---} p = e^{-ip \cdot x}. \quad (4.6.13)$$

4. Imponer conservación del momento total en cada vértice.
5. Integración sobre todos los momentos internos no determinados (por conservación),

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} . \quad (4.6.14)$$

6. Dividir por el factor de simetría.

Llegados a este punto, alguien podría preguntarse que ocurre con el límite $T \rightarrow \infty(1 - \varepsilon)$ que debemos tomar con tal de tener en cuenta correctamente la ecuación de Gell-Mann-Low, ec. (4.3.13). Este límite podría llevarnos a problemas con la integración sobre z . Vamos a ver que, de hecho, todo lo dicho hasta ahora es correcto. Teníamos una integral del tipo

$$\begin{aligned} \int d^4 z e^{-iP \cdot z} &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \int_{-T}^T dz^0 \int d^3 \mathbf{z} e^{-iP^0 z^0} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{z}} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \int_{-T}^T dz^0 e^{-iP^0 z^0} \delta^{(3)}(\mathbf{P}) , \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

donde $P = \sum_i p_i$. Para que esta integral no sea divergente es necesario dar también una parte imaginaria a p^0 ,

$$p^0 \longrightarrow p^0(1 + i\varepsilon) , \quad (4.6.16)$$

que coincide exactamente con la prescripción de Feynman para evitar los polos, tal y como se puede ver en la figura 4.1.

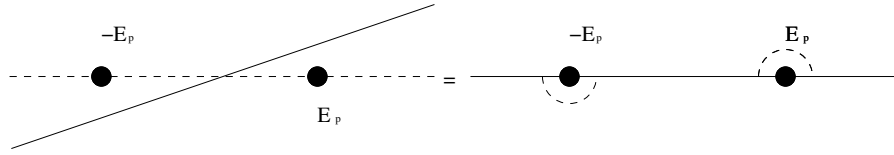


Figura 4.1: Prescripción de Feynman para evitar los polos en la integración.

4.6.3. Diagramas desconectados de puntos externos

Diremos que un diagrama (o una parte de un diagrama) es desconectado de los puntos externos si no contiene ningún punto externo. Un buen ejemplo de diagrama desconectado es el siguiente,

$$L_3 = p_3 \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama con tres bucles} \\ \text{con vértices } z \text{ y } w \end{array} \quad p_4 . \quad (4.6.17)$$

El cálculo de este diagrama comportará las siguientes integraciones,

$$\int d^4 z e^{-ip_3 \cdot (z-z)} e^{-ip_1 \cdot (z-w)} e^{-ip_2 \cdot (w-z)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) e^{ip_1 \cdot w} e^{-ip_2 \cdot w} , \quad (4.6.18)$$

$$\int d^4 w (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) e^{ip_1 \cdot w} e^{-ip_2 \cdot w} = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(0) , \quad (4.6.19)$$

que es divergente. Tanto el numerador como el denominador de la ecuación de Gell-Mann–Low, ecs. (4.3.13) y (4.5.2), contienen infinitos de estos diagramas². Si las magnitudes observables han de ser finitas y bien definidas, todos los diagramas desconectados han de factorizar tanto en el numerador como en el denominador, y de esta forma cancelarse exactamente. Vamos a dedicar el resto de esta sección a demostrar de forma rigurosa que esto es así.

Llamaremos V_n a todos los trozos de diagrama desconectados de puntos externos, ordenados de menor a mayor número de puntos internos. Los cuatro primeros diagramas desconectados son de la forma,

$$V_1 = \text{diagrama con un bucle} , \quad V_2 = \text{diagrama con dos bucles} , \quad (4.6.20)$$

$$V_3 = \text{diagrama con tres bucles} , \quad V_4 = \text{diagrama con cuatro bucles} . \quad (4.6.21)$$

Por tanto, cualquier diagrama en general se puede escribir de la forma

$$C_a \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} , \quad (4.6.22)$$

donde C_a es la contribución de la parte conectada del diagrama, y n_i es el número de veces que aparece el subdiagrama V_i . Así, pues, el numerador de la ecuación (4.5.2) se puede descomponer en una doble suma,

$$\sum_a \sum_{\{n_i\}} C_a \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} , \quad (4.6.23)$$

donde la suma sobre a se extiende a todos los diagramas conectados, y la suma sobre $\{n_i\}$ sobre todos los conjuntos de números enteros posibles. No obstante, las partes conectada y desconectada son totalmente independientes entre si, por lo que podemos escribir

$$\sum_a C_a \prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) . \quad (4.6.24)$$

En la expresión anterior reconocemos la expansión de la exponencial, por lo que el numerador de la ecuación (4.5.2) queda de la forma

$$\sum_a C_a e^{\sum V_i} , \quad (4.6.25)$$

o bien, de forma diagramática,

$$\left(\text{diagrama con un punto} + \text{diagrama con dos puntos} + \text{diagrama con tres puntos} + \text{diagrama con cuatro puntos} + \dots \right) \exp \left\{ \text{diagrama con un bucle} + \text{diagrama con dos bucles} + \dots \right\} . \quad (4.6.26)$$

Por otra parte, el denominador de la ecuación (4.5.2) tan sólo contiene la suma de todos los diagramas no conectados, que de nuevo se puede expresar como la exponencial de todas las partes no conectadas, V_i . Por lo tanto, al realizar el cociente, los diagramas no conectados cancelarán.

Finalmente, pues, obtenemos que la función de correlación de m campos se puede escribir como la suma de todos los diagramas posibles conectados con m puntos externos,

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \cdots \phi(x_m) | \Omega \rangle = \sum \text{diagramas conectados con } m \text{ puntos externos} . \quad (4.6.27)$$

²De hecho, todos los diagramas que contribuyen al denominador son desconectados de puntos externos.

4.6.4. Energía del vacío

Por lo que hemos visto hasta ahora, podría parecer que los diagramas no conectados no tienen ninguna importancia física. Sin embargo, esto no es así. Recordemos que la divergencia de los diagramas desconectados de puntos externos provenía de integrar una constante a todo el espacio tiempo, resultando en una delta de cero. Físicamente, esta integral representa el volumen del espacio tiempo,

$$\int d^4 z = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \longrightarrow 2T V , \quad (4.6.28)$$

donde V es el volumen del espacio, y $2T$ es la longitud de la dimensión temporal (recordemos que debemos tomar el límite $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$).

Consideramos la ecuación de Gell-Mann–Low para dos campos, escrita de la forma

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left\langle 0 \left| T \left[\phi(x)\phi(y) e^{-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)} \right] \right| 0 \right\rangle = \left\langle \Omega \left| T \left(\phi(x)\phi(y) \right) \right| \Omega \right\rangle \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} , \quad (4.6.29)$$

pero el miembro de la derecha ya lo hemos calculado, y se puede escribir de la forma (4.6.25), por lo que tenemos

$$\sum_a C_a e^{\sum_i V_i} = \left\langle \Omega \left| T \left(\phi(x)\phi(y) \right) \right| \Omega \right\rangle \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} . \quad (4.6.30)$$

El prefactor que multiplica a la exponencial en el segundo miembro de la ecuación (4.6.30), tal i como hemos visto en la sección anterior, equivale a la suma de todos los diagramas conectados, por lo que tenemos

$$E_0 = \frac{i}{2T} \sum_i V_i , \quad (4.6.31)$$

es decir, la energía del estado vacío se puede entender como la suma de todos los diagramas desconectados. Dado que estos son divergentes, la energía del vacío es infinita. En la sección 3.2.1 ya habíamos interpretado este hecho como la suma de infinitos osciladores armónicos. Por este motivo, es más conveniente utilizar el concepto de *densidad de energía del vacío*, que se puede escribir de la forma

$$\rho = \frac{E_0}{V} = \frac{i \sum_i V_i}{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)} , \quad (4.6.32)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (4.6.28).

4.7. Representación espectral de Källen–Lehmann

Hasta ahora, tan sólo hemos conseguido encontrar información de las funciones de correlación a partir de la teoría de perturbaciones. Sin embargo —mediante la representación de Källen–Lehmann— es posible obtener información del correlador a dos puntos independientemente de la teoría de perturbaciones.

Dado que en la teoría con interacción el hamiltoniano y el operador momento conmutan, es posible encontrar una base propia de ambos. Organizaremos los estados de la siguiente forma: $|\lambda_0\rangle$ será un estado propio del hamiltoniano con momento nulo, $\mathbf{P} |\lambda_0\rangle = 0$. El resto de estados pueden obtenerse mediante transformaciones de Lorentz (boosts),

$$|\lambda_p\rangle = U(\Lambda) |\lambda_0\rangle , \quad (4.7.1)$$

donde

$$P^\mu |\lambda_p\rangle = (E_p, \mathbf{p}) |\lambda_p\rangle . \quad (4.7.2)$$

Debido a que esta es una partícula física, debe estar sobre la capa másica,

$$E_p^2 - \mathbf{p}^2 = \text{cte} . \quad (4.7.3)$$

Los estados de una partícula en reposo vienen dados por

$$H |\lambda_0\rangle = m |\lambda_0\rangle , \quad (4.7.4)$$

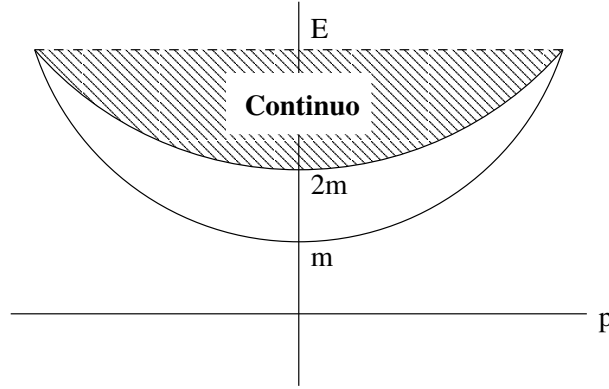


Figura 4.2: Estados posibles de energía en función del momento, p . Para $p = 0$, tenemos un sólo estado para $E = m$, y todo un continuo para $E \geq 2m$.

donde m es la masa física de la partícula, y no tiene por qué ser la misma que aparece en el lagrangiano libre, que a partir de ahora llamaremos m_0 . Si la partícula no está en reposo, su energía será

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} , \quad (4.7.5)$$

que siempre es mayor (o, en reposo, igual) a m .

En cambio, para dos o más partículas, es posible tener energía cinética pese a que el momento sea igual a cero (por ejemplo, si las partículas se mueven en direcciones opuestas, pero con el mismo momento). Dado un momento total, \mathbf{p} , la energía mínima se da cuando ambas partículas tienen el mismo momento, $\mathbf{p}/2$,

$$E_{\min} = 2\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + (2m)^2} . \quad (4.7.6)$$

Todas las energías por encima de esta están permitidas para ese momento. En la figura 4.2 se pueden ver cuales son los estados de energía permitidos para cada momento.

Dentro del espacio de una partícula, podemos utilizar la siguiente representación de la unidad,

$$\mathbb{1}_{\text{part.}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| . \quad (4.7.7)$$

Para todo el espacio de Hilbert, la resolución de la identidad se escribe de la forma,

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\lambda \neq 0} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\lambda_p\rangle \langle \lambda_p| . \quad (4.7.8)$$

Definimos la energía del estado con $\mathbf{p} = 0$ como

$$m_\lambda^2 = E_p^2(\lambda) - \mathbf{p}_\lambda^2 . \quad (4.7.9)$$

El siguiente paso es introducir la resolución de la identidad, ec. (4.7.8), en la función de correlación de dos puntos, para $x^0 > y^0$,

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle \\ &+ \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | e^{iP \cdot y} \phi(0) e^{-iP \cdot y} | \Omega \rangle , \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

donde hemos utilizado que el operador momento es el generador de las translaciones, ecuación (3.2.44). El primer término de la ecuación (4.7.10) es una constante, a menudo nula, que abreviaremos con la notación O^2 .

Para proseguir con el cálculo debemos tener en cuenta las siguientes propiedades,

$$|\lambda_p\rangle = U(\Lambda) |\lambda_0\rangle , \quad (4.7.11)$$

$$e^{-iP \cdot x} |\lambda_p\rangle = e^{-ip \cdot x} |\lambda_p\rangle \Big|_{p^0=E_p(\lambda)} , \quad (4.7.12)$$

$$e^{-iP \cdot x} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle . \quad (4.7.13)$$

La última igualdad proviene de que el estado vacío es invariante bajo el grupo de Poincaré, ya que (por definición) no contiene ninguna partícula. Utilizando estas propiedades, podemos evaluar los elementos de matriz de la ecuación (4.7.10),

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_p \rangle &= \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | \lambda_p \rangle \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_p \rangle e^{-ip \cdot x} \\ &= \langle \Omega | \phi(0) U(\Lambda) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x} \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x} , \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

donde en el último paso hemos utilizado que ϕ es un campo escalar, y por lo tanto³

$$\phi = U(\Lambda) \phi U^{-1}(\Lambda) . \quad (4.7.15)$$

Teniendo en cuenta todos estos resultados, podemos reescribir la ecuación (4.7.10) de la forma

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= O^2 + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p(\lambda)} \\ &= O^2 + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p(\lambda)} . \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Para simplificar la ecuación (4.7.16), utilizamos la integral de contorno

$$\int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m_{\lambda}^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-ip^0(x^2 - y^0)} \Big|_{p^0=E_p(\lambda)} , \quad (4.7.17)$$

donde la integración se realiza sobre el circuito de la figura 4.3, donde los polos se evitan siguiendo la prescripción de Feynman, y el contorno se cierra por el semi-plano inferior. Utilizando este resultado, la ecuación (4.7.16) puede escribirse tal que

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = O^2 + \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \cdot Z , \quad (4.7.18)$$

donde hemos definido *la renormalización del campo*,

$$Z := \left| \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \right|_{p^0=E_p(\lambda)}^2 , \quad (4.7.19)$$

Comparando la ecuación (4.7.16) con la definición del propagador de Feynman, ec. (3.3.13), podemos reescribir el correlador a dos puntos de la forma,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = O^2 + \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y; M_{\Lambda}^2) , \quad (4.7.20)$$

esta es la representación espectral de Källén–Lehmann, donde

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} 2\pi \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) \cdot Z , \quad (4.7.21)$$

³En realidad, necesitamos la propiedad opuesta a la (4.7.15), pero es trivial pasar los operadores al primer miembro tomando su inversa.

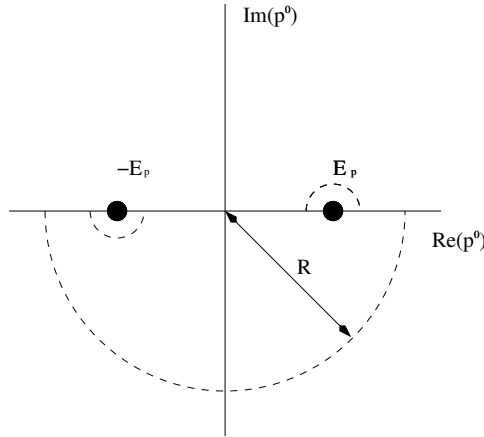


Figura 4.3: Contorno de integración para la ecuación (4.7.17).

es la *densidad espectral*. La densidad espectral tiene una forma de delta de Dirac en m^2 , indicando el estado aislado de una sola partícula, y presenta una cierta curva continua a partir de $(2m)^2$; tal y como se puede ver en la figura 4.4(a). En algunos casos, pueden aparecer resonancias en la parte continua, o estados ligados de varias partículas, tal y como se puede ver en la figura 4.4(b). El origen físico de las resonancias y los estrados ligados queda fuera del objetivo de este documento, por lo que no vamos a prestarle más atención. Pueden consultarse más detalles, por ejemplo, en [2].

Para acabar esta sección, vamos a considerar la transformada de Fourier del correlador a dos puntos,

$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(0)) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 + M^2 + i\varepsilon}. \quad (4.7.22)$$

Teniendo en cuenta la estructura de la densidad espectral, ec. (4.7.21), podemos escribir la ecuación (4.7.22) de la forma

$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(0)) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{(2m)^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 + M^2 + i\varepsilon}, \quad (4.7.23)$$

es decir, la transformada de Fourier del correlador a dos puntos tiene un polo simple en m , y un corte a partir de $2m$, tal y como se muestra en la figura 4.5.

En la teoría libre, la transformada de Fourier del correlador a dos puntos se escribe de la forma

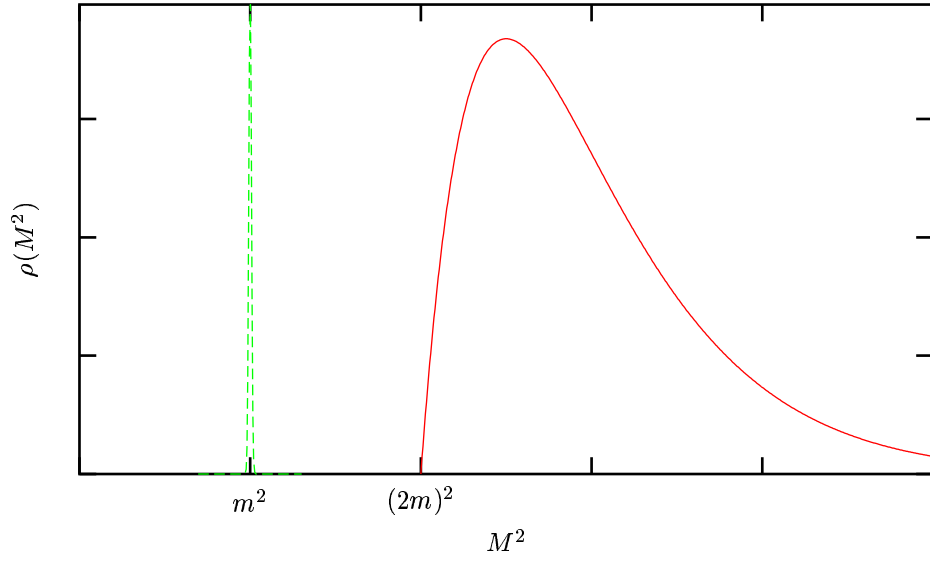
$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(0)) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (4.7.24)$$

que recuerda bastante al primer término de la ecuación (4.7.23), salvo el factor $Z = |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$. Podemos interpretar la renormalización del campo, Z , como la probabilidad de que un campo cree una partícula en el estado $|\lambda_0\rangle$, partiendo del vacío. Dado que en la teoría libre, comparando las ecuaciones (4.7.23) y (4.7.24), tenemos $Z = 1$, podemos interpretar que el campo libre tan sólo puede crear estados con una partícula a partir del vacío. De la misma forma, un campo con interacción puede crear estados con más de una partícula.

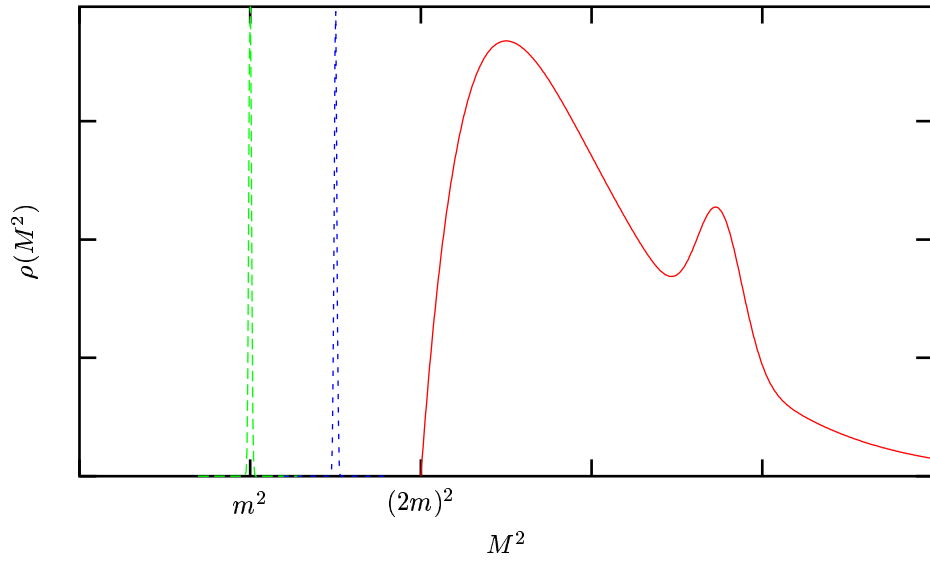
4.8. Matriz S

4.8.1. Definición

La matriz S , o matriz de scattering, nos da la amplitud de un determinado proceso donde interaccionan dos partículas iniciales, que provienen de estados de momento fijado, para dar lugar a un número arbitrario de partículas, que asintóticamente llegaran a nuevos estados (diferentes) de momento fijado. El hecho de considerar



(a) Forma típica de la densidad espectral, con el estado de una partícula (línea verde) y el continuo después de $(2m)^2$ (línea roja).



(b) Densidad espectral con un estado ligado extra (línea azul) y una resonancia (bulto en la línea roja).

Figura 4.4: Formas típicas de la densidad espectral.

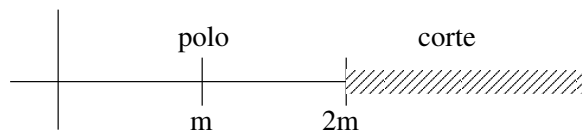


Figura 4.5: Estructura analítica de la transformada de Fourier del correlador a dos puntos, ec. (4.7.23).

estados iniciales y finales que, asintóticamente, tienen momento perfectamente fijado es la característica fundamental que diferencia la matriz S de los correladores habituales. En este sentido, la representación espectral de Källén–Lehmann es crucial, ya que nos garantiza que existen estados de partículas con momento definido.

Consideramos que las partículas incidentes están en un estado $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_{\text{in}}$, y las partículas finales en otro estado $|\mathbf{p}_1, \dots\rangle_{\text{out}}$. La amplitud del proceso vendrá dada por el operador de evolución,

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1, \dots | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{\text{in}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1, \dots | e^{-iH 2T} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle \\ &=: \langle \mathbf{p}_1, \dots | S | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

donde hemos supuesto que antes del tiempo $-T$ (muy grande en valor absoluto) ya podemos suponer que los estados iniciales son de momento fijo; y que después de un tiempo T (muy grande), podemos hacer lo mismo con los estados finales.

A menudo nos interesará tan sólo la parte de la matriz S que tiene en cuenta la interacción, por lo que nos interesará separa la parte que contribuye al proceso de no interacción,

$$S = \mathbb{1} + iT, \quad (4.8.2)$$

con lo que el elemento de matriz de la ecuación (4.8.1) queda de la forma

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1, \dots | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{\text{in}} = \langle \mathbf{p}_1, \dots | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle. \quad (4.8.3)$$

Es conveniente, además, dejar de forma explícita la conservación del momento, por lo que es útil definir el elemento de matriz \mathcal{M} ,

$$\langle \mathbf{p}_1, \dots | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle =: (2\pi^2) \delta^{(4)} \left(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum_f \mathbf{p}_f \right) i\mathcal{M}(\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rightarrow \mathbf{p}_f). \quad (4.8.4)$$

Siguiendo el mismo espíritu de la deducción de la fórmula de Gell-Man–Low, podemos preguntarnos si existe alguna forma de relacionar los estados asintóticos $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle$ con los estados de momento fijo en la teoría libre, $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_0$. El resultado exacto se puede obtener rigurosamente mediante la fórmula de reducción LSZ, que veremos en la sección 4.9. Por ahora, procederemos de forma heurística realizando el ensayo

$$\langle \mathbf{p}_1, \dots | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \left\langle \mathbf{p}_1, \dots \left| T \left(\exp \left\{ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right\} \right) \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle_0. \quad (4.8.5)$$

4.8.2. Cálculo hasta primer orden

Por simplicidad, supondremos que existen tan sólo dos partículas salientes. Para evaluar el miembro de la derecha de la ecuación (4.8.5) substituiremos la exponencial por su desarrollo de Taylor término a término. La contribución a orden cero es la siguiente,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^6 \left(\delta(p_A - p_1) \delta(p_B - p_2) + \delta(p_A - p_2) \delta(p_B - p_1) \right), \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

donde hemos utilizado las propiedades de conmutación de los operadores de creación y destrucción, ec. (3.2.18). La ecuación (4.8.6) se puede representar de forma diagramática de la forma siguiente,

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ A & B \end{array} \quad + \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ \bullet & \bullet \\ A & B \end{array} \end{array}. \quad (4.8.7)$$

Como vemos, el orden cero no contiene interacción en las partículas, ya que tan sólo obtenemos diagramas de propagación libre.

La contribución a primer orden en λ es

$$\left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| T \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi^4(x) \right) \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle = \left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| N \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi^4(x) + \text{contracciones} \right) \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle . \quad (4.8.8)$$

Recordemos que el orden normal implica llevar todos los operadores ϕ_- a la derecha. La aplicación de los operadores ϕ_{\pm} sobre un estado de momento fijado (en la teoría libre) es

$$\phi_+ | \mathbf{p} \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} a_k e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger | 0 \rangle = e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle , \quad (4.8.9)$$

$$\langle \mathbf{p} | \phi_- = \langle 0 | a_p \sqrt{2E_p} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} a_k^\dagger e^{+ik \cdot x} = \langle 0 | e^{ip \cdot x} , \quad (4.8.10)$$

lo que nos sugiere una nueva notación, en donde los campos se contraen con el momento⁴

$$e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle = \overline{\phi(x)} | p \rangle = \text{diagrama} , \quad (4.8.11)$$

$$\langle 0 | e^{ip \cdot x} = \langle p | \phi(x) = \text{diagrama} , \quad (4.8.12)$$

Según el teorema de Wick, la parte del hamiltoniano de interacción se puede descomponer en tres tipos de términos,

$$T(\phi^4) = N \left(3 \overline{\phi\phi\phi\phi} + 12 \overline{\phi\phi\phi\phi} + \phi\phi\phi\phi \right) . \quad (4.8.13)$$

El primer tipo de término nos lleva a

$$\left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle = 8 \times \left(\text{diagrama} + \text{diagrama} \right) , \quad (4.8.14)$$

es decir, sencillamente el producto del orden cero, ec. (4.8.7), por dos burbujas del vacío. El segundo término de la ecuación (4.8.13) nos lleva a cuatro tipos de contribuciones,

$$\left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle + \left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle + \left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle + \left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle , \quad (4.8.15)$$

o bien, en forma diagramática,

$$\text{diagrama} + \text{diagrama} + \text{diagrama} + \text{diagrama} + \text{diagrama} . \quad (4.8.16)$$

De nuevo, estos diagramas no contienen interacción.

Vamos, por último, a las contribuciones del tipo del tercer término en la ecuación (4.8.13), donde no hay ninguna contracción con puntos internos. Tan sólo tenemos una contribución de este tipo, que es

$$\left\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left| \overline{\phi\phi\phi\phi} \right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \right\rangle_0 = \text{diagrama} , \quad (4.8.17)$$

⁴Esto es equivalente a contraer el campo con el operador de creación que actúa sobre el vacío para darnos el estado de momento. Sin embargo, por comodidad en la notación, nosotros utilizaremos la contracción del campo con el estado.

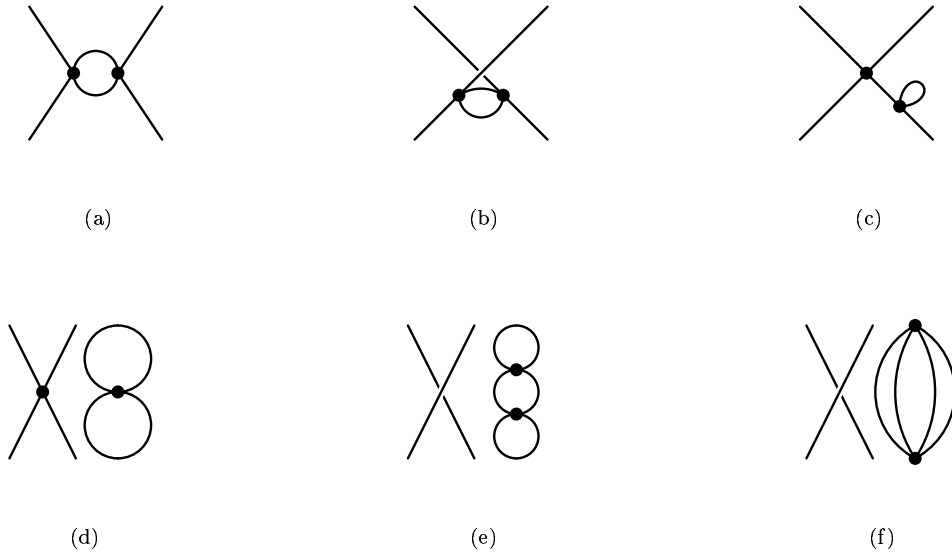


Figura 4.6: Algunos diagramas de segundo orden que aparecen en el cálculo de la matriz S .

que es el primer diagrama conectado, cuyo valor es $-i\lambda$. Dado que esta es la única contribución con interacción que hemos obtenido, sacamos la conclusión de que, hasta primer orden, tenemos

$$\mathcal{M} = -\lambda + o(\lambda)^2 . \quad (4.8.18)$$

4.8.3. Diagramas conectados y amputados

El siguiente paso lógico sería realizar el cálculo a segundo orden. Un diagrama típico de los que aparecen en el segundo orden es el siguiente,

$$\langle \overline{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} | \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = \text{Diagrama} . \quad (4.8.19)$$

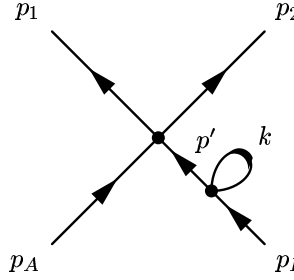
Otros ejemplos de diagramas típicos que aparecen considerando el segundo orden de la expansión perturbativa se muestran en la figura 4.6.

En la figura 4.6 vemos que podemos clasificar los diagramas en *conectados* y *desconectados*⁵, según si están formados por un producto de dos (o más) subdiagramas independientes. De los ejemplos dados, los tres últimos, figuras 4.6(d), 4.6(e) y 4.6(f), son desconectados.

Los diagramas desconectados poseen loops de vacío que, como vimos en la sección 4.6.3 factorizan y, por lo tanto, podemos olvidarnos de ellas. Es decir, nos quedaremos tan sólo con los diagramas conectados, descartando todos los diagramas desconectados. Sin embargo, aún tenemos una fuente potencial de divergencias que debemos

⁵Es importante no confundir el concepto de *diagrama desconectado* que acabamos de describir con el de *diagrama desconectado de los puntos externos*, que utilizábamos en la sección 4.6.3.

evitar. Para analizarla cuidadosamente, calcularemos explícitamente, a modo de ejemplo el diagrama de la figura 4.6(c),



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p') ,
 \end{aligned} \tag{4.8.20}$$

donde el factor $1/2$ proviene del factor de simetría del loop. La segunda delta de Dirac nos permite realizar la integración sobre p' , con $p' = p_B$. No obstante, el momento p_B está asociado a una partícula real, en la capa másica, por lo que tenemos $p_B^2 = m^2 \equiv p'^2$, y esto provoca una divergencia en la primera fracción de la ecuación (4.8.20). Este tipo de divergencias aparecerá siempre que haya un propagador interno que ajunte dos regiones del diagrama que no están conectadas por ningún otro propagador. Este tipo de diagramas se llaman *amputables*, y para obtener un resultado finito debemos ignorarlos en nuestro cálculo.

Como regla general, un diagrama es amputable si es posible dividir por la mitad un propagador de forma que obtengamos dos subdiagramas desconectados entre sí.

Finalmente, pues, el elemento de matriz para un proceso $p_A + p_B \rightarrow p_f + \dots$ se puede calcular como la suma de todos los diagramas de Feynman conectados y amputados, con dos momentos entrantes, p_A y p_B , y con momentos resultantes p_f, \dots .

4.9. Fórmula de reducción LSZ

4.9.1. Deducción analítica

La fórmula de reducción de Lehmann–Symanzick–Zimmermann (LSZ) nos da, de forma rigurosa, la relación entre las funciones de correlación y la matriz S . Vamos a deducirla de forma constructiva. Comenzaremos recordando la transformada de Fourier del correlador a dos puntos, que nos daba la representación espectral de Källen–Lehman, ec. (4.7.23),

$$\int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \sim \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} , \tag{4.9.1}$$

donde el símbolo \sim significa que las expresiones a ambos lados tienen la misma estructura polar, es decir, los mismos polos aislados⁶.

Vamos a generalizar este resultado a la función de $n+1$ puntos, donde transformamos por Fourier la primera variable, x , y dejamos intactas el resto, de z_1 a z_n ,

$$I = \int d^4 x^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \left(\phi(x) \phi(z_1) \cdots \phi(z_n) \right) | \Omega \rangle . \tag{4.9.2}$$

Vamos a dividir la integración sobre x^0 en tres regiones,

$$\int d^4 x^0 = \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} d^4 x^0}_{\text{región I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} d^4 x^0}_{\text{región II}} + \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0}_{\text{región III}} , \tag{4.9.3}$$

donde $T_+ \gg z_i^0$ y $T_- \ll z_i^0$, para todos los valores de i . La integración sobre la región II es finita y, por tanto, no contribuye a la estructura polar. Comenzaremos por evaluar la integración en la región III; para ello, insertamos la identidad en el espacio de Hilbert, ec. (4.7.8),

$$I_3 = \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{ip \cdot x} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_q \rangle \langle \lambda_q | T \left(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n) \right) | \Omega \rangle . \tag{4.9.4}$$

⁶Recordemos que, además, la transformada de Fourier tiene un corte para $p \geq 2m$, pero no entra en juego en la estructura polar.

El elemento de matriz $\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_q \rangle$ ya fue calculado en las secciones anteriores, ec. (4.7.14),

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_q \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-iq \cdot x} . \quad (4.9.5)$$

Ahora, toda la dependencia en \mathbf{x} está en exponenciales, lo que nos permite realizar la integral para obtener una delta de conservación,

$$I_3 = \lim_{q^0 \rightarrow p^0} \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{2E_q} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | \Omega \rangle e^{i(p^0 - q^0)x^0} . \quad (4.9.6)$$

Para que la integral sobre x^0 sea convergente debemos añadir una pequeña parte real en el numerador. Una vez hecho esto, la integral es inmediata,

$$\int_{T_+}^{\infty} dt e^{(i\omega - \varepsilon)t} = \frac{i}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega T} . \quad (4.9.7)$$

La delta de Dirac nos permite realizar la integración sobre \mathbf{q} , con lo que el resultado final para la región III es

$$I_3 = \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{i(p^0 - q^0)T_+}}{p^0 - q^0 + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | \Omega \rangle . \quad (4.9.8)$$

Podemos comprobar que I_3 tiene un polo en $q^0 = p^0 \equiv E_q$,

$$I_3 \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | \Omega \rangle , \quad (4.9.9)$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} p^2 - m^2 &= (p^0)^2 - E_p^2 \\ &= (p^0 + E_p)(p^0 - E_p) \\ &\rightarrow 2E_p(p^0 - E_p) . \end{aligned} \quad (4.9.10)$$

En la región I, el procedimiento es muy similar, con $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{p}$. El resultado que se obtendría es

$$I_1 \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \langle \Omega | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | -\mathbf{p} \rangle \sqrt{Z} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} , \quad (4.9.11)$$

Experimentalmente, en muchas ocasiones no tenemos un haz monocromático, sino que nos encontramos con *paquetes de onda*, que se pueden caracterizar por una función perfil $\varphi(\mathbf{k})$, con lo cual tenemos

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \longrightarrow \int d^4x \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot x} \varphi(\mathbf{k}) . \quad (4.9.12)$$

Con esto, la contribución de la integración en la región III se escribe de la forma

$$I_3 = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | \Omega \rangle \quad (4.9.13)$$

$$\underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \langle \mathbf{k} | T(\phi(z_1) \cdots \phi(z_n)) | \Omega \rangle , \quad (4.9.14)$$

que, como vemos, tiene un corte si el haz es monocromático, $\phi(\mathbf{k}) \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$.

Ahora ya estamos en condiciones de realizar la transformada de Fourier del segundo campo. Llamaremos x_1 y x_2 a las variables que vamos a transformar por Fourier, y z_1, \dots al resto. Procediendo de manera análoga al caso anterior,

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{ip_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \langle \Omega | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{k}} | T(\phi(z_1) \cdots) | \Omega \rangle . \quad (4.9.15)$$

El siguiente paso consiste en insertar la resolución de la identidad para separar los elementos de matriz en los que ya sabemos calcular,

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_1} 2E_{q_2}} \\ \times \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{\mathbf{q}_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{\mathbf{q}_2} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2} | T(\phi(z_1) \dots) | \Omega \rangle, \quad (4.9.16)$$

con lo que, substituyendo el valor de los elementos de matriz, tenemos

$$\left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \frac{i \sqrt{Z}}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle \lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2} | T(\phi(z_1) \dots) | \Omega \rangle. \quad (4.9.17)$$

En el caso de que el estado inicial sea de momentos definidos, el perfil del paquete de onda será una delta de Dirac, que además nos permite escribir el estado de momentos como el estado $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle_{\text{out}}$, con lo cual, la estructura polar de la transformada de Fourier será

$$\sim \left(\prod_{i=1,2} \frac{i \sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \cdot \text{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T(\phi(z_1) \dots) | \Omega \rangle. \quad (4.9.18)$$

Finalmente, la fórmula de reducción de LSZ se obtiene repitiendo este proceso hasta hallar la transformada de Fourier de todas las variables. El resultado que se obtiene es

$$\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4 y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m)) | \Omega \rangle \\ \underset{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ p_j^0 \rightarrow E_{k_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{i \sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{i \sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n \rangle. \quad (4.9.19)$$

4.9.2. LSZ con diagramas de Feynman

Al calcular la función de correlación a dos puntos nos encontraremos con diagramas amputados y conectados a dos puntos externos, x e y . Estos diagramas, por la tercera regla de Feynman (en espacio de momentos), tendrán un factor común del tipo

$$e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (4.9.20)$$

que por la quinta regla de Feynman deberá ser integrado a respecto de p , para dar una delta de Dirac, cuya transformada de Fourier es la unidad. De esta forma, podemos simplificar las reglas de Feynman de forma que no asignamos ningún factor (diferente a la unidad) a los puntos externos, y tan sólo debemos integrar sobre momentos externos. De esta forma, las nuevas reglas de Feynman son

1. Por cada línea, un propagador,

$$x \bullet \text{---} \bullet y = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (4.9.21)$$

2. Por cada vértice,

$$\begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} = (-i\lambda). \quad (4.9.22)$$

pero, según la representación de Källen-Lehmann, ec. (4.7.23), tan sólo debe haber un polo, con valor Z . Para comprobarlo, podemos realizar la suma de la ecuación (4.9.27) teniendo en cuenta que se trata de una serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{siempre que } |x| < 1, \quad (4.9.28)$$

con lo que el resultado final es

$$\text{---} \bullet \text{---} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \mathbb{M}^2(p^2) + i\varepsilon}. \quad (4.9.29)$$

Recordemos que el polo de la ecuación (4.9.29) se corresponde con la masa física de las partículas en la teoría completa,

$$p^2 - m_0^2 - \mathbb{M}^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0, \quad (4.9.30)$$

y el residuo es la renormalización del campo Z , que se puede calcular de forma trivial si tenemos en cuenta que

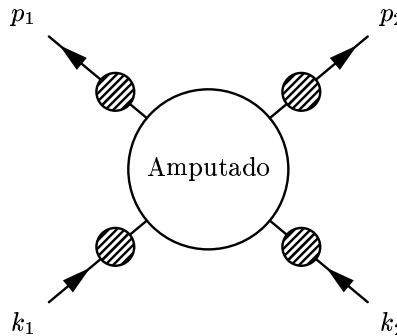
$$p^2 - m_0^2 - \mathbb{M}^2(p^2) + i\varepsilon \approx (p^2 - m^2 + i\varepsilon) \left(1 - \frac{d\mathbb{M}^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} + \dots \right), \quad (4.9.31)$$

con lo cual el residuo es

$$Z = \left(1 - \frac{d\mathbb{M}^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}. \quad (4.9.32)$$

4.9.4. Cálculo de la matriz S

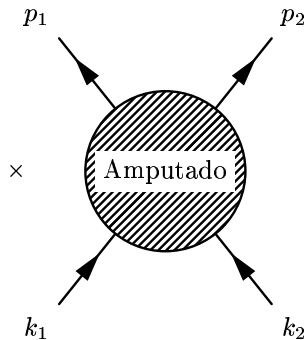
Para el cálculo de la matriz S , según la fórmula de reducción LSZ, ec. (4.9.19), nos interesa el cálculo del correlador con dos momentos entrantes y n salientes. Por ejemplo, si $n = 4$ necesitamos el correlador a cuatro puntos, que se podrá escribir como la suma de todos los diagramas con cuatro momentos externos. Estos diagramas se pueden dividir en la parte amputada por la suma de todas las partes desconectadas de dos puntos enganchadas en cada una de las cuatro patas, es decir,



$$= \prod_{i=1}^4 \frac{i Z}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(\sqrt{Z})^4} \langle p_1 p_2 | S | k_1 k_2 \rangle, \quad (4.9.33)$$

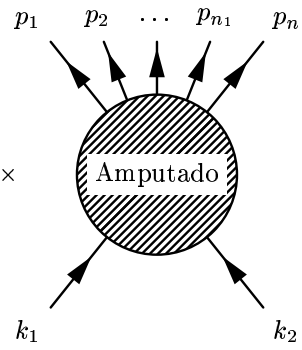
o, lo que es lo mismo,

$$\langle p_1 p_2 | S | k_1 k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^4 \times$$



$$. \quad (4.9.34)$$

En el caso de que tengamos n partículas salientes, debemos substituir la potencia $4 \rightarrow n + 2$, es decir,

$$\langle p_1 \cdots p_n | S | k_1 k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \times \text{Amputado} . \quad (4.9.35)$$


A partir de la ecuación (4.9.35) podemos calcular, al menos perturbativamente, la amplitud de cualquier proceso de scattering.

Bibliografía

- [1] H. Goldstein. *Classical Mechanics*.
- [2] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [3] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University press, 1996.
- [4] Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub Co, 1994.