TEORÍA DE LA MEDIDA

Jesús María Ríos Aliaga

17 de abril de 2002

Índice General

Capítulo 1

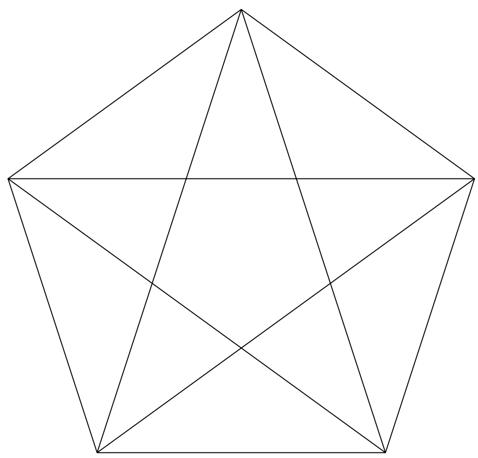
INTRODUCCIÓN

1.1 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

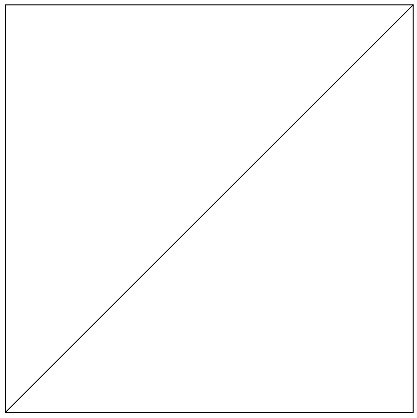
Tras el descubrimiento de los incomensurables en la escuela pitagórica del siglo V a.c., y el consiguiente fracaso de la aritmetización de la geometría, se empieza a hacer álgebra geométrica.

Dados dos segmentos, pudiera ocurrir que no existiese una unidad de medida común, como por ejemplo ocurre en:

1. El lado del pentágono y su diagonal.



2. El lado del cuadrado y su diagonal.



Lo que pone fin a la Teoría atómica de la extensión geométrica, según la cual, los segmentos de la geometría están compuestos por puntos extensos.

Si esta Teoría fuera cierta, sería posible encontrar para dos segmentos cualesquiera, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, *una* unidad de medida común $\mathbf{u}$ a ambos**,** de tal forma que

$$\overline{AB} = n\mathbf{u}$$

$$\overline{CD} = m\mathbf{u}$$

para lo cual bastaría con aplicar el algoritmo de Euclides, es decir, hallar el "m.c.d." restando geométricamente el segmento pequeño al grande hasta que el resto sea el segmento nulo,es decir, hasta una división geométrica exacta. Proceso que bajo las hipótesis de la Teoría atómica de la extensión geométrica sería **finito.**

Siendo $\mathbf{u}$ el último segmento por el que se ha dividido, resultará ser, por la construcción del mismo, la *máxima unidad de medida común* a ambos. El cual permite asociar a cada segmento un número natural, en nuestro caso n y m, que los mide, en el sentido de contener cada segmento esa cantidad de veces, n y m, el segmento $\mathbf{u}$.

La existencia del segmento $\mathbf{u}$ en las hipotesis de la Teoría atómica de la extensión geométrica, permite asociar a cada par ordenado de sementos $\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$ cualesquiera, el par ordenado de números(n, m) que obtenemos por el proceso descrito anteriormente o de *resta mutua* que los griegos llamarían *antiphaieresis.* Puesto que tanto n como m son números naturales y $(\mathbf{N}, \leq)$ es un orden total, resuta que en las hipotesis de la Teoría atómica de la extensión geométrica todo par de segmentos son comparables, *conmensurables*, atraves de los números naturales asociados a ellos.

Definición 1 *Para expresar lo dicho anteriormente,* ***y no otra cosa,*** *los griegos de* *la época escribian:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n}{m}$$

Observación 2 *En la definición no se dice si la unidad de medida común a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tiene que ser la máxima unidad de medida común* $\mathbf{u}$*, utilizada anteriormente para hallar n y m, o vale cualquier otra. Esto es así, porque, de hecho, no importa cual sea la unidad de medida común, a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que utilizemos: la relación $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ no dependerá de la unidad de medida común a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que sabemos que existirá en las hipótesis de la Teoría atómica de la extensión geométrica. Luego para comparar dos segmentos no es necesario conocer las veces que contienen, cada uno de ellos, a un segmento que cabe una cantidad exacta de veces en ambos. Sino que basta con conocer la relación entre ambos $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. Lo que obliga a desarrollar una Teoría de proporciones para que tenga sentido nuestra definición. Es decir, como:*

$$\overline{AB} = n'\mathbf{u}' = n\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u}' = \frac{n\mathbf{u}}{n'}$$

$$\overline{CD} = m'\mathbf{u}' = m\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u}' = \frac{m\mathbf{u}}{m'}$$

entonces

$$\frac{n'}{m'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n'\mathbf{u}'}{m'\mathbf{u}'} = \frac{n'\frac{n\mathbf{u}}{n'}}{m'\frac{m\mathbf{u}}{m'}} = \frac{n}{m}$$

Esta Teoría de proporciones, que tiene sentido en el contexto de la Teoría atómica de la extensión geométrica,en la que todo par de segmentos son conmensurables, cae junto con esta a causa del descubrimiento de los incomensurables. En el libro V de los Elementos de Euclides aparece una revisión de la Teoría de proporciones, original de Eudoxo, que permite saber cuando un par ordenado de segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) $\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$ cualesquiera es* ***proporcional*** *a otro par ordenado de segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) (a, b); pares ordenados que llamarán* ***razones****, sin necesidad que los segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) sean conmensurables*

El descubrimiento de los incomensurables, y por tanto,de la imposibilidad de asociar a cada par ordenado de segmentos $\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$ cualesquiera, un par ordenado

*Dos magnitudes se dice que son arquimedianas si al mutiplicar cualquiera de ellas por si misma un número **finito** de veces, suficientemente grande, podemos superar a la otra. Los griegos de la época suponian que dos magnitudes cualesquiera de la misma "dimensión" eran arquimedianas, y por supuesto, si eran de distinta dimensión no.

de números (n, m), expulsa de la geometria la aritmética. Lo que rompe con la idea de los Pitagóricos de que *todo es número,* a la cual habían llegado a traves de sus viajes a las grandes culturas de la época: la *babilonica*, que reducía el estudio de los astros a números, y la *egipcia* que reducía el estudio del calendario y de la medida de las tierras a números. Lo que les lleva a pensar que todo esta hecho de números, en particular la geometría. Es por ello, que el descubrimiento de los incomensurables, rompe con estas ideas. Distinguiendo, claramente, cantidad de magnitud. Tratando la geometría de la magnitud, es decir, de lo infinitamente divisible. Y la aritmetica de la cantidad, es decir, del número.

Al no poderse asociar números a segmentos no puede usarse el orden total de los números naturales $(\mathbf{N}, \leq)$ para compararlos. Se empieza a hacer álgebra geometrica, es decir, para sumar segmentos no se suman los números asociados a ellos, pues pueden no existir; sino que se suman como segmentos geométicos, Y para la comparación de segmentos, ya no se comparan los numeros asociados a ellos, pues pueden no existir, sino que se pone uno encima de otro a partir de un extremo de uno de ellos, y se comparan como conjuntos con el orden *parcial* de la inclusión. El orden *parcial* de la inclusión de conjuntos restringido a "los segmentos" será un orden *total.*

¿Cómo se compararón "superficies en el plano"?

Si las queremos comparar como conjuntos de puntos en el plano a traves de la inclusión de conjuntos, al ser esta relación de inclusión un orden parcial habrá figuras planas no comparables. Como por ejemplo:

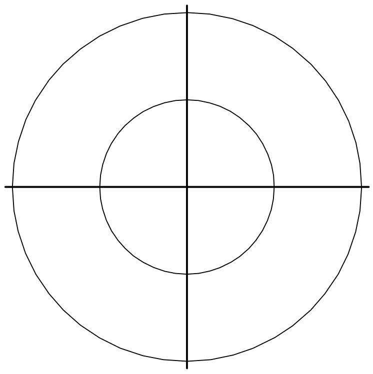
Estas figuras planas no están relacionadas por la inclusión de conjuntos al no estar ninguna de allas contenida en la otra.

Aun así, ambas son la unión disjunta de cuatro cuadrados iguales. Por una de las *nociones comunes* que aparece en el libro I de los *Elementos* de Euclides, que dice: *Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, entonces los totales son también iguales;* como las dos figuras se pueden generar añadiendo magnitudes iguales (los cuadrados) sucesivamente a figuras iguales, entonces los totales, es decir, las figuras del dibujo, son *iguales.* Observese que un razonamiento basado en la aditividad de la medida,es decir que la medida de la unión disjunta es la suma de los números asociodos, no valdría, al hacer referencia a números asociados a figuras.

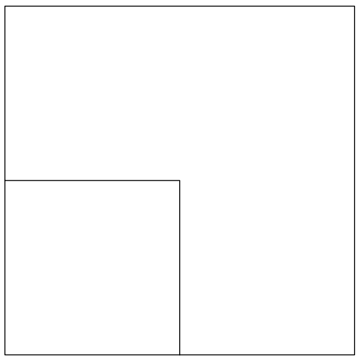
Esta idea junto con la posibilidad de reducir el problema de comparar dos figuras planas, con la relación parcial de inclusión conjuntista, al problema de comparar segmetos con la relación de inclusión conjuntista, lo cual siempre será posible, permite resolver teóricamente el problema.

Para esto último, a cada figura plana le tendremos que encontrar otra figura (por ejemplo un **circulo**,o un **cuadrado**) de igual magnitud superficial. En tal caso la comparación de figuras planas se realiza comparando estas figuras asociadas de igual magnitud, que por tener una forma especial (bien sea da del **circulo** o la del **cuadrado**) son siempre comparables.

En el caso del circulo, bastaría con comparar sus radios:



Y en el caso del cuadrado, bastaría con comparar sus lados.



Los griegos de la época optarón por está última opción. Por lo cual, para comparar figuras planas tubieron la necesidad de encontrar **cuadrados** de igual magnitud que las figuras de partida. En particular, si una de las figuras de partida es un circulo se plantea el problema de encontrar un cuadrado de igual superficie: *es el problema de la cuadratura del circulo.*

El desarrollo de la teoría de Galois en el siglo XIX permitirá demostrar que no es posible construir con los instrumentos platónicos, es decir con la regla y el compás, un *cuadrado* cuya área coincida con la de un *circulo* dado. Lo cual no quiere decir que sea implosible la *cuadratura del circulo,* siempre que no seamos tan exigentes en los métodos de construcción, permitiendo la presencia de lineas que no se puedan trazar con el úncico auxilio de la regla y el compás.

1.2 LA CUADRATURA DEL CIRCULO POR ARQUÍMEDES. EL MÉTODO DE EXAHUSCIÓN DE EUDOXO.

Lema 3 *(Principio de exahusción debido a Eudoxo) Dadas dos magnitudes homogeneas, es decir, de la misma "dimendión", que denotaremos por M y ε; con la magnitud ε tan pequeña como queramos. Si a la magnitud M le quito la mitad o más y a lo que me queda le vuelvo a quitar la mitad o más, y así sucesivamente*

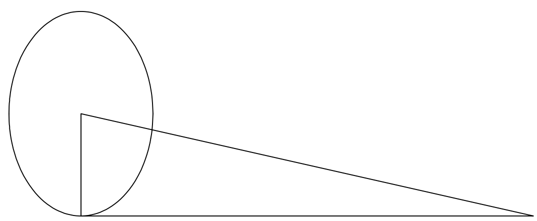
$$M_{n+1} < \frac{M_n}{2}$$

$$M_n < \frac{M}{2^n}$$

entonces llegará un monento en el cual me quede menos que la magnitud homogenea dada ϵ

$$\exists n_\varepsilon : M_{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Teorema 4 *(aparece en La medida del circulo de Arquímedes) El area de un circulo* ***C****, de radio* ***r****, es igual al area de un triangulo rectangulo* ***T*** *con catetos: el radio el circulo* ***r****, y la* longitud de la circunferencia ***L***



Proof. *Demostraremos area* $(\mathbf{C}) = $ *area* $(\mathbf{T})$ *por doble reducción al absurdo.*
Supongamos que area $(\mathbf{C}) \neq$ *area* $(\mathbf{T})$ *entonces*

$$\left.\begin{array}{c} area\,(\mathbf{C}) > area\,(\mathbf{T}) \;\; y\ llegaremos\ a\ contradicción \\ o\ bien \\ area\,(\mathbf{C}) < area\,(\mathbf{T}) \;\; y\ llegaremos\ a\ contradicción \end{array}\right\} \Rightarrow area\,(\mathbf{C}) = area\,(\mathbf{T})$$

■

Capítulo 2
FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA.

Sea $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Re$ *intervalo compacto* de la recta *real*

Definición 5 *Una **partición** de I=*$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Re$ *es un conjunto finito* $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m\} \in \wp(I)$ *tal que* $\mathbf{a} = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{m-1} \leq t_m = \mathbf{b}$

Sea $\mathbf{f} : \mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \Re$ *función real* en $I \subset \Re$
y $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m\} \in \wp(I)$ *partición* de I

Definición 6 *La **variación** de la función **f** respecto de la **partición*** $\pi \in \wp(I)$ *que denotamos V(f,π) será:*

$$V(f, \pi) = \sum_{i=0}^{m-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

Definición 7 *La **variación total** de la función **f** en I que denotamos V(f,I) será:*

$$V(f, I) = \sup_{\pi \in \wp(I)} V(f, \pi)$$

Definición 8 *Si la **variación total** de la función **f** en I está acotada,es decir:*

$$V(f, I) < \infty$$

*entonces **f** se dice que es de **variacón acotada**.*

Proposición 9 *Si **f** es una funcón **monótona** $\Longrightarrow$**f** es de **variación acotada** y*

$$V(f, I) = |\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})|$$

Proposición 10 *Se vericica para todo* $c \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *lo siguiente:*

$$V(f, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = V(f, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) + V(f, [\mathbf{c}, \mathbf{b}])$$

Sea $\mathbf{f} : \mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \Re$ *función* de **variación acotada** en $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ se puede definir la función siguiente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = V(f, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to [0, \infty]$$

$$\mathbf{x} \to \mathbf{F}(\mathbf{x}) = V(f, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]) \text{ para todo } \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

que será **monótona creciente.**

2.1 EJERCICIOS

Ejercicio 11 *Calcula la variación total de las siguientes funciones en $I = [0,1]$:*

- $\mathbf{f}$:$I = [0,1] \to \Re$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} < \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

  $\mathbf{f}$ es una función **monótona decreciente** en $[0,1]$**,**y por lo visto en la proposicón9 $\mathbf{f}$ es una función de **variación acotada** con

$$V(f,[0,1]) = |\mathbf{f}(1) - \mathbf{f}(0)| = 1$$

- $\mathbf{f}$:$I = [0,1] \to \Re$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]} = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq \mathbf{x} < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{3} \leq \mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} < \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

  sea $\mathbf{c} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ por la proposición10 tenemos$V(f,[0,1]) = V(f,[0,\mathbf{c}]) + V(f,[\mathbf{c},1])$ con $\mathbf{f}$ **monótona creciente** en $[0,\mathbf{c}]$ y **monótona decreciente** en $[\mathbf{c},1]$ que por9 resulta:

$$V(f,[0,\mathbf{c}]) = |\mathbf{f}(\mathbf{c}) - \mathbf{f}(0)| = 1$$

$$V(f,[\mathbf{c},1]) = |\mathbf{f}(1) - \mathbf{f}(\mathbf{c})| = 1$$

  y por tanto:

$$V(f,[0,1]) = V(f,[0,\mathbf{c}]) + V(f,[\mathbf{c},1]) = 1 + 1 = 2$$

- $\mathbf{f}$:$I = [0,1] \to \Re$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \chi_{(0,\frac{1}{2}]} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{x} = 0 \\ 1 & \text{para } 0 < \mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} < \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

  sea $\mathbf{c} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ por la proposición10 tenemos$V(f,[0,1]) = V(f,[0,\mathbf{c}]) + V(f,[\mathbf{c},1])$ con $\mathbf{f}$ **monótona creciente** en $[0,\mathbf{c}]$ y **monótona decreciente** en $[\mathbf{c},1]$ que por9 resulta:

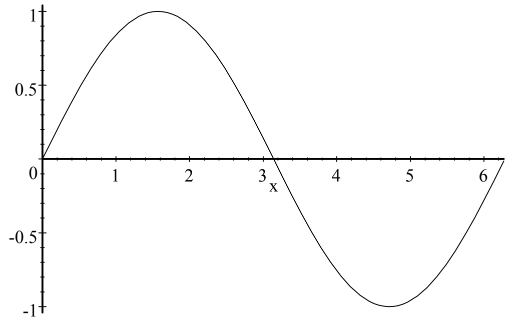
$$V(f,[0,\mathbf{c}]) = |\mathbf{f}(\mathbf{c}) - \mathbf{f}(0)| = 1$$

$$V(f,[\mathbf{c},1]) = |\mathbf{f}(1) - \mathbf{f}(\mathbf{c})| = 1$$

  y por tanto:

$$V(f,[0,1]) = V(f,[0,\mathbf{c}]) + V(f,[\mathbf{c},1]) = 1 + 1 = 2$$

Ejercicio 12 *Calcula la variación total de las siguiente función* $\mathbf{f} : I = [0, 2\pi] \to \Re$ *definida por* $f(x) = \sin x$



Por la proposición10 tenemos$V(f, [0,1]) = V(f, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) + V(f, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]) + V(f, \left[\frac{3\pi}{2}, 1\right])$con **f monótona creciente** en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, **monótona decreciente** en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y **monótona creciente** en $\left[\frac{3\pi}{2}, 1\right]$que por9 resulta:

$$V(f, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) = \left|\mathbf{f}(\frac{\pi}{2}) - \mathbf{f}(0)\right| = 1$$

$$V(f, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]) = \left|\mathbf{f}(\frac{3\pi}{2}) - \mathbf{f}(\frac{\pi}{2})\right| = 2$$

$$V(f, \left[\frac{3\pi}{2}, 1\right]) = \left|\mathbf{f}(1) - \mathbf{f}(\frac{3\pi}{2})\right| = 1$$

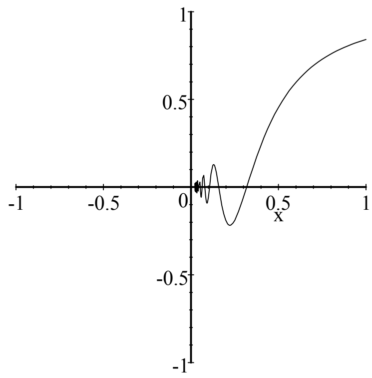
Por tanto

$$V(f, [0,1]) = V(f, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) + V(f, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]) + V(f, \left[\frac{3\pi}{2}, 1\right]) = 1 + 2 + 1 = 4$$

Ejercicio 13 *Demostrar que la función* $\mathbf{f} : I = [0, 1] \to \Re$ *definida por*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} = o \\ \mathbf{x} sen \frac{1}{\mathbf{x}} & \mathbf{x} \in (0, 1] \end{cases}$$

no *es una función de* ***variación acotada***



Sea la partición de $[0,1]$ de $n+1$ subintervalos : $\pi_n = \left\{0, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}, \cdots, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi}, 1\right\}$

La **variación** de la función **f** respecto de la **partición** $\pi_n \in \wp(I)$ será:

$$V(f,\pi_n) = \sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \left| f(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}) - f(0) \right| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \left| f(1) - f(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi}) \right| \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=1}^{n-1} \left| f(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n-i)\,\pi}) - f(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n-i+1)\,\pi}) \right| =$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{3+8\,(n-i)+4\,(n-i)^2} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{3+8\,(n-i)+4\,(n-i)^2} =$$

Tomo j=n-i

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j+1}{3+8j+4j^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Luego la **variación total** de la función **f** en $[0,1]$ será:

$$V(f,[0,1]) = \sup_{\pi\in\wp(I)} V(f,\pi) \geq V(f,\pi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

pues $\pi_n \in \wp(I)$

Por tanto $V(f,[0,1]) \not< \infty$,es decir,**f no** es una función de **variación acotada.**

Observación 14 ***f*** *es una función* ***acotada*** *en* $[0,1]$ *y* ***no*** *es una función de* ***variación acotada*** *en* $[0,1]$

Si ***f*** *es una función de* ***variación acotada*** *en* ***I***$\Longrightarrow$***f*** *es una función* ***acotada*** *en* ***I****.*

Luego el que ***f*** *sea una función* ***acotada*** *en* ***I*** *es* ***condición necesaria pero no condición suficiente*** *para que* ***f*** *sea una función de* ***variación acotada*** *en* ***I.***

Capítulo 3
LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELJES.

Sea $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Re$ *intervalo compacto* de la recta *real.*

Sean $\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \Re$ *funciónes reales* en $\mathbf{I} \subset \Re$.

Sea $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \in \wp(\mathbf{I})$ una *partición* de $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ como definimos en 5

Sea $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n\}$ con $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Definición 15 *Dada $\pi \in \wp(\mathbf{I})$. La Suma de Riemann-Stieljes de $\boldsymbol{f}$ respecto de $\boldsymbol{\alpha}$ como*

$$\mathbf{S}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(c_i) \left(\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\right)$$

Notación 16 *Norma de una partición $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \in \wp(\mathbf{I})$ es la longitud del mayor de los subintervalos de la partición π.*

$$\|\pi\| = \max_{0 \le i \le n-1} \{t_{i+1} - t_i\}$$

$(\wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}]), \subseteq)$ *es un orden parcial, pero si definimos $\pi \le \pi' \Longleftrightarrow \|\pi\| \le \|\pi'\|$ entonces $(\wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}]), \le)$ es un orden total*

Observación 17

$$\pi \subseteq \pi' \Longrightarrow \pi \ge \pi'$$

$$\pi \subseteq \pi' \not\Leftarrow \pi \ge \pi'$$

Definición 18 *$\boldsymbol{f}$ es Riemann-Stieljes integrable respecto de $\boldsymbol{\alpha}$ en $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, que escribiremos "$\mathbf{f} \in \mathbf{RS}(\boldsymbol{\alpha})$ en $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$" si existe $\lim\limits_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \pi)$ y en tal caso se define la integral de Riemann-Stieljes de f respecto de α en I como*

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} d\boldsymbol{\alpha} \overset{not}{=} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(t) d\boldsymbol{\alpha}(t) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \pi)$$

Notación 19 *Se dice que **f** es el **integrando** y que $\boldsymbol{\alpha}$ es el **integrador.***

Observación 20 *Si* $\boldsymbol{\alpha}(x) = id(x) = x$ *entonces* $\mathbf{S}(\mathbf{f}{,}id{,}\pi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(c_i)\,(id(t_i) - id(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(c_i)(t_i - t_{i-1})$ *que es la suma de Riemann de **f** respecto de* $\pi \in \wp([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ *es decir,* $\mathbf{S}(\mathbf{f}{,}\pi)$. *Y por tanto en el caso en el que el integrador sea la identidad la integral de Riemann-Stieljes coincide con la integral de Riemann.*

Observación 21 *Si* $\boldsymbol{\alpha}$ *es una función de variación acotada en* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *y* $\mathbf{f} \in \mathbf{RS}\,(\boldsymbol{\alpha})$ *en* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, *entonces* $\mathbf{f} \in \mathbf{RS}\,(\boldsymbol{\alpha})$ *en* $[\mathbf{a},\mathbf{x}]$ *para todo* $\mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *y tiene sentido definir la siguiente función **F** que depende del límite superior de integración:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}\,d\boldsymbol{\alpha} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \Re$$

$$\mathbf{x} \to \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t)\,d\boldsymbol{\alpha}(t) \text{ para todo } \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

3.1 EJERCICIOS

Ejercicio 22 *Sean* $\mathbf{I} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset \Re$ *y* $\mathbf{c} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$

$\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \Re$ una función *continua* en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.
$\mathbf{g} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \Re$ definida por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{c},\mathbf{b}]} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < \mathbf{c} \\ 1 & \text{para } \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{cases}$$

Demostrar que $\mathbf{f} \in \mathbf{RS}\,(\mathbf{g})$ en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ y $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}\,d\mathbf{g} = \mathbf{f}(\mathbf{c})$.

Sean $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \in \wp([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ una *partición* de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ y $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_j \in [t_{j-1}, t_j]$

Como $t_0 = \mathbf{a}$ y $t_n = \mathbf{b}$ existe $i \in \mathbf{N}$,$1 \leq i \leq n$ con $t_i \geq \mathbf{c}$ y $t_{i-1} < \mathbf{c}$ entonces

$$\mathbf{S}(\mathbf{f},\mathbf{g}{,}\pi) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}(x_j)\,(\mathbf{g}(t_j) - \mathbf{g}(t_{j-1})) = \mathbf{f}(x_i)\,(\mathbf{g}(t_i) - \mathbf{g}(t_{i-1})) = \mathbf{f}(x_i)$$

Tenemos:

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\mathbf{f},\mathbf{g}{,}\pi) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{f}(x_i)$$

Y como se verifica $0 \leq (t_i - t_{i-1}) \leq \|\pi\|$ por 16 entonces si $\|\pi\| \to 0 \Rightarrow (t_i - t_{i-1}) \to 0$

junto con que si $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\mathbf{c} \in [t_{i-1}, t_i]$ entonces

$$0 \leq |x_i - \mathbf{c}| \leq (t_i - t_{i-1}) \underset{\|\pi\| \to 0}{\longrightarrow} 0$$

resulta: $x_i \underset{\|\pi\| \to 0}{\longrightarrow} \mathbf{c}$ y como $\mathbf{f}$ es continua en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, lo es en $\mathbf{c}$, y por tanto

$$\mathbf{f}(x_i) \underset{x_i \to \mathbf{c}}{\longrightarrow} \mathbf{f}(\mathbf{c}) \Leftrightarrow \lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{f}(x_i) = \mathbf{f}(\mathbf{c})$$

Y por tanto *existe*

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \pi) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{f}(x_i) = \mathbf{f}(\mathbf{c})$$

Siendo $\mathbf{f} \in \mathbf{RS}(\mathbf{g})$ en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ con

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} d\mathbf{g} = \lim_{\|\boldsymbol{\pi}\| \to \mathbf{0}} \mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

Ejercicio 23 *Calcula las siguientes integrales de Riemann-Stieljes:*

- $\int_{-1}^{1} x \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x) d\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x)$
  Sean $\mathbf{I} = [-1, 1] \subset \Re$ y $0 \in (-1, 1)$

  $\mathbf{f} : [-1, 1] \to \Re$ definida por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x \boldsymbol{\chi}_{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq \mathbf{x} < 0 \\ x & \text{para } 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

es una función *continua* en $[-1, 1]$.
$\mathbf{g} : [-1, 1] \to \Re$ definida por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq \mathbf{x} < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

Por el ejercico anterior tenemos que $\mathbf{f} \in \mathbf{RS}(\mathbf{g})$ en $[-1, 1]$ y

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} d\mathbf{g} = \mathbf{f}(0) = 0$$

- $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x) d\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x)$
  Sean $\mathbf{I} = [-1, 1] \subset \Re$ y $0 \in (-1, 1)$

Sea $\mathbf{f} : [-1,1] \to \Re$ una función definida por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leq \mathbf{x} < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}$$

Sean $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \in \wp([-1,1])$ una *partición* de $[-1,1]$ y $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_j \in [t_{j-1}, t_j]$

Como $t_0 = -1$ y $t_n = 1$ *existe* $i \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq n$ con $t_i \geq 0$ y $t_{i-1} < 0$ entonces

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \pi) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x_j) \left(\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(t_j) - \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(t_{j-1})\right) = \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x_i) \left(\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(t_i) - \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(t_{i-1})\right) = \boldsymbol{\chi}_{[0,1}$$

Tenemos:

$$\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\chi}_{[0,1]} d\boldsymbol{\chi}_{[0,1]} = \lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \pi) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x_i)$$

con $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $t_{i-1} < 0 \leq t_i$.

Y como se verifica $0 \leq (t_i - t_{i-1}) \leq \|\pi\|$ por 16 entonces si $\|\pi\| \to 0 \Rightarrow (t_i - t_{i-1}) \to 0$

junto con que si $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $0 \in [t_{i-1}, t_i]$ entonces

$$0 \leq |x_i - 0| \leq (t_i - t_{i-1}) \underset{\|\pi\| \to 0}{\longrightarrow} 0$$

resulta: $x_i \underset{\|\pi\| \to 0}{\longrightarrow} 0$

Podemos tomar $x_i = 0 \in [t_{i-1}, t_i]$ para toda $\pi \in \wp([-1,1])$ resutando:

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}(x_i) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}(0) = \lim_{\|\pi\| \to 0} 1 = 1$$

También podemos tomar $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para toda $\pi \in \wp([-1,1])$ de forma que $x_i \underset{\|\pi\| \to 0}{\longrightarrow} 0$ y $x_i < 0$, pues $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $t_{i-1} < 0 \leq t_i$, resultando:

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}(x_i) = 0$$

Y por tanto **no** *existe* $\lim_{\|\pi\| \to 0} \mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \pi) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x_i)$

Es decir, $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$ **no** es Riemann-Stieljes integrable respecto de $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$en $[-1,1]$

- $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x) d\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x)$

  Sean $\mathbf{I} = [-1,1] \subset \Re$ y $0 \in (-1,1)$

Sea $\mathbf{f}:[-1,1]\rightarrow\Re$ una función definida por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}=\begin{cases}0 & \text{para } -1\leq\mathbf{x}\leq 0\\ 1 & \text{para } 0<\mathbf{x}\leq 1\end{cases}$$

Sea $\mathbf{g}:[-1,1]\rightarrow\Re$ una función definida por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}=\begin{cases}0 & \text{para } -1\leq\mathbf{x}<0\\ 1 & \text{para } 0\leq\mathbf{x}\leq 1\end{cases}$$

Sean $\pi=\{t_0,t_1,\ldots,t_{n-1},t_n\}\in\wp([-1,1])$ una *partición* de $[-1,1]$ y $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ con $x_j\in[t_{j-1},t_j]$

Como $t_0=-1$ y $t_n=1$ *existe* $i\in\mathbf{N}$,$1\leq i\leq n$ con $t_i\geq 0$ y $t_{i-1}<0$ entonces

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]},\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]},\pi)=\mathbf{S}(\mathbf{f},\mathbf{g},\pi)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}(x_j)\left(\mathbf{g}(t_j)-\mathbf{g}(t_{j-1})\right)=\mathbf{f}(x_i)\left(\mathbf{g}(t_i)-\mathbf{g}(t_{i-1})\right)=\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x_i)$$

Tenemos:

$$\int_{-1}^{1}\mathbf{f}d\mathbf{g}=\lim_{\|\pi\|\to 0}\mathbf{S}(\mathbf{f},\mathbf{g},\pi)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x_i)$$

con $x_i\in[t_{i-1},t_i]$ y $t_{i-1}<0\leq t_i$.

Y como se verifica $0\leq(t_i-t_{i-1})\leq\|\pi\|$ por 16 entonces si $\|\pi\|\to 0\Rightarrow(t_i-t_{i-1})\to 0$

junto con que si $x_i\in[t_{i-1},t_i]$ y $0\in[t_{i-1},t_i]$ entonces

$$0\leq|x_i-0|\leq(t_i-t_{i-1})\underset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow}0$$

resulta: $x_i\underset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow}0$

Podemos tomar $x_i=0\in[t_{i-1},t_i]$ para toda $\pi\in\wp([-1,1])$ resutando:

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}(x_i)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}(0)=\lim_{\|\pi\|\to 0}0=0$$

También podemos tomar particiones de$[-1,1]$, $\pi'=\left\{t'_0,t'_1,\ldots,t'_{n-1},t'_n\right\}\in\wp([-1,1])$, verificando $\pi\geq\pi'$ y $t_{i-1}<0<t_i$, y $\mathbf{x}=\left\{x'_1,x'_2,\ldots,x'_{n-1},x'_n\right\}$ con $x'_j\in\left[t'_{j-1},t'_j\right]$ de forma que $x_i\underset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow}0$ y $x_i>0$,resultando:

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}(x_i)=\lim_{\|\pi\|\to 0}1=1$$

Y por tanto **no** *existe* $\lim_{\|\pi\|\to 0}\mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]},\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]},\pi)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}(x_i)$

Es decir, $\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}$ **no** es Riemann-Stieljes integrable respecto de $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$en $[-1,1]$

Observación 24 *Si en lugar de la definición dada en 18 para la integral de Riemann-Stieljes consideramos esta otra, como hacen en algunos libros:*

Definición 25 $\boldsymbol{f}$ *es Riemann-Stieljes integrable respecto de* $\boldsymbol{\alpha}$ *en* $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$*, que escribiremos "*$\mathbf{f} \in \mathbf{RS}(\boldsymbol{\alpha})$ *en* $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$*" si existe un número real* $\boldsymbol{J}$ *con la siguiente propiedad:*$\forall \varepsilon > 0, \exists \pi_\epsilon \in \wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}])„\forall \pi \in \wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \ \forall \ \mathbf{x}_\pi$ *: elección de puntos en cada subintervalo de la partición* $(\pi_\epsilon \subset \pi \Longrightarrow |\mathbf{S}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \pi) - \mathbf{J}| < \epsilon)$

Entonces se puede comprobar trivialmente que $\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}$ **si** es Riemann-Stieljes integrable respecto de $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$en $[-1, 1]$ y $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x) d\boldsymbol{\chi}_{[0,1]}(x) = 0$,segun la definición 25. Basta tomar $\pi_\epsilon = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \in \wp([-1, 1])$ con un $t_i = 0$. Pues entonces, para todo $\pi \in \wp([-1, 1])$ con $\pi_\epsilon \subset \pi$ se tiene $(t_i = 0) \in \pi$ y cualquiera que sea la elección de $x_i \in [t_{i-1}, t_i] \Leftrightarrow t_{i-1} \le x_i \le t_i = 0$ tendremos

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \pi) = \mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \pi) = \boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x_i) \overset{x_i \le 0}{=} 0$$

verificandose la definición 25:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \pi_\epsilon \in \wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}]), , \forall \pi \in \wp([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \forall \ \mathbf{x}_\pi : (\pi_\epsilon \subset \pi \Longrightarrow |\mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \pi) - 0| < \epsilon)$$

pues $\mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \pi) = 0, \forall \pi \, (\pi_\epsilon \subset \pi)$ cualquiera que sea la elección de puntos en cada subimtervalo de π.

Y como $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$ **no** es Riemann-Stieljes integrable respecto de $\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$en $[-1, 1]$, observamos que, en la integral de Riemann-Stieljes, al cambiar el valor de la función integrando en un solo punto la integral puende pasar de existir a no existir. Lo cual no sucedía con la integral de Riemann de una función, pues podemos cambiar el valor de ésta en una cantidad finita de puntos sin afectar a la existencia ni al valor de ésta.

Capítulo 4

EL PROBLEMA DE LA MEDIDA PARA SUBCONJUNTOS DE LA RECTA REAL

4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sabiendo que la longitud de un intervalo de la recta real es la diferencia, en valor absoluto, de sus puntos extremos:

$$long\,([a,b]) = long\,((a,b)) = long\,([a,b)) = long\,((a,b]) = |b-a|$$

Parece natural extender la noción de longitud a conjuntos de puntos de la recta real más complicados que los intervalos. Si exigimos a esta extención de la noción de longitud la siguiente propiedad: *la longitud de una unión disjunta de sunconjuntos de la recta es la suma de las longitudes, pudiendo ser esta unión infinita numerable (lo cual ya no es tan intuitivo).* Tendremos, entonces,la longitud de cualquier subconjunto *abierto* de la recta real. Pues todo subconjunto *abierto* de la recta real es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, cuya longitud podemos calcular y, por tanto, la longitud de todo subconjunto *abierto* de la recta real es suma de las longitudes de esos intervalos abiertos que lo componen. Pero la clase de los subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}$ no cubre cualquier subconjunto de $\mathbf{R}$.

Se pretende construir una función $\mathbf{m}$ de conjunto:

$$\mathbf{m} : \wp(\mathbf{R}) \to [0,\infty]$$

con las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{m}\,([0,1]) = 1$

2. $\mathbf{m}$ invariante por *isometrías*, que en la recta real son las *traslaciones.* Es decir,cualqiera que sea el subconjunto de la recta real E, tenemos

$$\mathbf{m}\,(E+a) = \mathbf{m}\,(E)\ \ \forall a \in \mathbf{R}$$

   siendo $E + a = \{x + a : x \in E\}$

3. *(Aditividad numerable).*Si $\{E_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \wp(\mathbf{R})$ disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mathbf{m}\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}\,(E_n)$$

De estas tres propiedades se deduce:

- para cada intervalo $I \subset \wp(\mathbf{R})$ resulta $\mathbf{m}(I) = longitud(I)$, luego, utilizando que $\mathbf{m}$ invariante por *isometrías,* tenemos $\mathbf{m}(\{a\}) = 0$
- $\mathbf{m}$ esta univocamente definida en los subconjuntos abiertos de **R.**
- $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$, pues, por la aditividad numerable aplicada a la sucesión $\{\emptyset\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \wp(\mathbf{R})$ de conjuntos disjuntos dos a dos,tenemos:

$$\mathbf{m}(\emptyset) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{m}(\emptyset) \Rightarrow \mathbf{m}(\emptyset) = 0 \ \ \textit{por ser } \mathbf{m}(\emptyset) \geq 0$$

- $\mathbf{m}$ es función de conjunto **monótona**, es decir, $\forall A, B \in \wp(\mathbf{R})$

$$A \subset B \Longrightarrow \mathbf{m}(A) \leq \mathbf{m}(B)$$

  por ser $\mathbf{m}(\cdot) \geq 0$, es decir, posituva, y por la propiedad 3.

Definición 26 *Las funciones de conjunto $\boldsymbol{\mu}$ definidas en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de $\wp(\mathbf{R})$*

$$\boldsymbol{\mu} : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$$

se dice que son una medida si verifican:

- *$\boldsymbol{\mu}$ es σ-aditiva, es decir:*

$$\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\mu}(A_n) \quad \forall\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \ \ \textit{, con } A_n \in \mathcal{A} \textit{ disjuntos dos a dos}$$

- *$\boldsymbol{\mu}$ es positiva, es decir:*

$$\boldsymbol{\mu}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Observación 27 *Todas las medidas verifican:*

- *(monotonía)*

$$\textit{Si } A, B \in \mathcal{A}, \textit{con } A \subset B \textit{ entonces } \boldsymbol{\mu}(A) \leq \boldsymbol{\mu}(B)$$

- *(σ-subaditividad)*

$$\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\mu}(A_n) \quad \forall\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \ \ \textit{, con } A_n \in \mathcal{A}$$

Observación 28 $\mathbf{m}$ *es una medida sobre $\wp(\mathbf{R})$ invariante por isometrias,que en la recta real son traslaciones. Y normalizada, es decir, $\mathbf{m}([0,1]) = 1$, o lo que es igual,* $\mathbf{m}$ *asigna a cada intervalo de **R** su longitud.*

4.1.1 EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Hay dos métodos para decir verdades (en un cierto lenguaje) acerca de una estructura matemática:

Comprobando, directamente en la estructura matemática,que lo que digo es verdad. Yendo a los objetos matemáticos mismos, haciendolos inmediatamente presentes a la intuición y comprobando que lo que se dice acerca de ellos es verdad. Los objetos matemátcos se nos hacen presentes en la visión no sensible, y en la medida en que las cosas de las que habla una frase pueden verse, la proposición será verdad evidente. Ya sea en la visión sensual si el objeto es sensual, un color, un sonido, ya sea en nuestro caso, en la visión no sensual, pues, el objeto es no sensual. Exigimos la presencia del objeto mismo del que se habla, que por su naturaleza sera insensible, no sentido por ninguno de los cincos setidos. No confundamos presencia inmediata de un objeto con su naturaleza sensual o no sensual.

O bien deduciendo unas verdades de otras *formalmente*, olvidandose de los objetos de los que se habla.

Experiencias matemáticas como las ocurridas en el ámbito la teoría atómica de la extensión geométrica de los Pitagoricos,que dice que los segmentos estan formados por átomos, puntos indivisibles y extensos. Teoría, admitida por el primero de los dos métodos, de la que se siguen contradicciones:se deduce de esta teoría que todo par de segmentos son comensurables, es decir, tienen una máxima unidad de medida común.Antinomias puestas en evidencia seguramente por Hipaso de Metaponto, hacia mediados del siglo IV a.c.,con el *descubrimiento* de segmentos incomensurables en el pentagono estrellado. Segmentos cuya antiphaieresis no parece tener fin. Experiencias matemáticas, como deciamos, que hacen poco fiable el primer método de busqueda de verdades, lleva a la matemática a utilizar este primer método de busqueda de verdades lo menos posible y en sentencias lo má sencillas posibles.Sentencias, estas, que formaran los *axiomas no logicos* de la teoría matemática que se trate. Obteniendo el resto de las verdades por el segundo método, es decir formalmente, a partir de estos axiomas no logicos.

Supondremos axiomatizada la Teoría de conjuntos con los axiomas no logicos de Zermelo-Freankel (ZF) más el axioma de Elección, en ingles axiom of Choice(ZF+C). Puedes consularlos en cualquier libro de Teoría de conjuntos. En particular entre las sentencias equvatentes al axioma de Elección tenemos

Axioma 29 *(axioma de Elección) Para cualquier clase de conjuntos **existe** una función de elección.*

Axioma 30 *(equivalente al axioma de Elección) Para toda partición de un conjunto **existe** un conjunto de representantes, que también llamaremos conjunto de elección.*

A continuación vamos a convencernos que el Axioma de Elección es verdadero.

Si nos dan una colección infinita de conjuntos formados cada uno de estos por un par de zapatos, entonces yo puedo definir una función de elección construtivamente, a traves del siguiente criterio: coge de cada conjunto formado por un par de zapatos el zapato correspondiente al pie derecho. Esta contrucción asegura la existencia de la función de elección.

Si nos dan una colección infinita de conjuntos formados cada uno de estos por un par de calcetines indistingibles, repito, los elementos de cada conjunto de la colección son indistingibles, entonces yo no puedo construir una criterio de elección a traves del cual yo pueda coger de cada conjunto formado por un par de elementos indistingibles uno de ellos.Sin embargo el axioma de Elección asegura la existencia de la función de elección, aunque no sea construible por ser la colección *infinita*. Es decir, dado un conjunto de la colección yo no tengo ningun criterio para saber que elemento de dicho conjunto ha sido elegido. Pero el axioma de Elección asegura que existe una elección de un elemento de cada conjunto de la colección infinita de conjuntos.

Luego el Axioma de Elección asegura la existencia de conjuntos (funciones) que no tienen porque ser construibles. Es decir, no tiene porque haber un criterio que me permita saber si un determinado elemento está o no está en el conjunto (ha sido elegido por la función de elección).

4.1.2 EL TEOREMA DE VITALI (1905)

A continuación vamos aprobar, utilizando el axioma de Elección, que no existe ninguna función de conjunto $\mathbf{m}$ que sea una medida sobre $\wp(\mathbf{R})$ invariante por *isometrías*, y *con* $\mathbf{m}([0,1]) = 1$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{m}(I) = longitud(I)$ para todo intervalo I de $\mathbf{R}$

Luego no se puede extender la noción de longitud a cualquier subconjunto de la recta real, es decir, asiginar valores en $[0,\infty]$ a cualquier subconjunto de la recta real compatibles con las propiedades 1, 2 y 3 del problema de la medida planteado al principio de la sección.

Este teorema se debe a Vitali y apareció en el año 1905 en su trabajo *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.*

Teorema 31 *(Vitali, 1905) No existe ninguna medida*

$$\mathbf{m} : \wp(\mathbf{R}) \to [0,\infty]$$

con las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{m}([0,1]) = 1$

2. $\mathbf{m}$ invariante por *isometrías*, que en la recta real son las *traslaciones.* Es decir, cualqiera que sea el subconjunto de la recta real E, tenemos

$$\mathbf{m}(E+a) = \mathbf{m}(E) \ \ \forall a \in \mathbf{R}$$

siendo $E + a = \{x + a : x \in E\}$

3. *(Aditividad numerable).*Si $\{E_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \wp(\mathbf{R})$ disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}\left(E_n\right)$$

Proof. Sea

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbf{R}$$

en donde definimos la siguiente relación binaria, para todo $x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$x \backsim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbf{Q}$$

que será una relación binaria de eqivalencia, pues:
i. $x \backsim x \overset{def}{\Leftrightarrow} x - x = 0 \in \mathbf{Q}$
ii. Si $x \backsim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow -(x-y) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{Q} \overset{def}{\Leftrightarrow} y \backsim x$
iii. $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \backsim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbf{Q} \\ \text{y } y \backsim z \overset{def}{\Leftrightarrow} y - z \in \mathbf{Q} \end{array}\right\} (x-y) + (y-z) = x - z \in \mathbf{Q} \overset{def}{\Leftrightarrow} x \backsim z$
luego

$$\frac{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}{\backsim} = \left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

donde

$$[x] = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y \backsim x\right\} = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y - x \in \mathbf{Q}\right\} =$$

$$= \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y - x = r \ , \ r \in \mathbf{Q}\right\} = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y = x + r \ , r \in \mathbf{Q}\right\}$$

que son las clases de equivalencia del conjunto cociente $\frac{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}{\backsim}$, y portanto, conjuntos disjuntos.

Como $\left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$ es una partición de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, aplicando el **AXIOMA DE ELECCIÓN** tomo un representante en cada clase $[x] = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y = x + r \ , r \in \mathbf{Q}\right\}$ y los coleciono en el conjunto de eleción **A** llamado conjunto de Vitali**.**

El conjunto **A** tendrá cardinal *no numerable,* por haber una cantidad no numerable de clases de eqivalencia en el cociente.

Como el conjunto de los números racionales **Q** es numerable, tambien lo será el subconjunto suyo $\mathbf{Q}\cap[-1,1]$, cuyos elementos enumero de la siguiente forma:

$$r_1 = 0, r_2, r_3, \ldots$$

Y definimos

$$A_k = r_k + \mathbf{A}$$

que son conjuntos trasladados, y por tanto isométricos, del conjunto de elección **A**

$$A_k \equiv \mathbf{A}$$

Luego por ser A_k congruente por traslación con **A**, aplicando la propiedad 2 de **m,** es decir, **m** es invariante *traslaciones,* tenemos:

$$\mathbf{m}(A_k) = \mathbf{m}(r_k + \mathbf{A}) = \mathbf{m}(\mathbf{A}) \ \ \forall k \in \mathbf{N}$$

La sucesión de conjuntos$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ verifica:
1.

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ i \neq j$$

Por reducción al absurdo: Si $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, $i \neq j$ como $A_k = r_k + \mathbf{A}$ tenemos:

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing \Leftrightarrow (r_i + \mathbf{A}) \cap (r_j + \mathbf{A}) \neq \varnothing$$

es decir, *existen* $a^i, a^j \in \mathbf{A}$ tal que $r_i + a^i = r_j + a^j$ luego

$$a^i - a^j = r_j - r_i \in \mathbf{Q} \overset{def}{\Leftrightarrow} a^i \backsim a^j$$

luego $a^i = a^j$ pues en **A** solo hay un representante de cada clase, y como $a^i \backsim a^j$ entonces $[a^i] = [a^j]$

Y si $a^i = a^j \Rightarrow r_i = r_j$.Por tanto, $A_i = A_j$ lo que implica $i = j$.*contradicción*

2.

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

2.1.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + \mathbf{A}) \subset [-1, 1] + \mathbf{A} \overset{\mathbf{A}\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}{\subset} \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

2.2. Si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ entonces como **A** es un conjunto de eleción de

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \bigcup_{disjunta} \left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

tenemos

$$\exists a \in \mathbf{A} \ , \ [x] = [a] \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{A} \ , \ x \backsim a \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{A} \ , \ x - a \in \mathbf{Q}$$

y

$$-1 \leq x - a \leq 1$$

Denotamos $q = x - a \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]$ y tenemos $x = a + q$ con $a \in \mathbf{A}$ y $q \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]$ luego:

$$x \in \mathbf{A} + q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + \mathbf{A}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Es decir:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Tenemos, por tanto, una sucesión de conjuntos$\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ acotados y disjuntos dos a dos, tal que:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Veamos que no existe ninguna función de conjunto $\mathbf{m}$ que sea una medida sobre $\wp(\mathbf{R})$ invariante por *traslaciones*, *con* $\mathbf{m}(I) = \mathit{longitud}(I)$ para todo intervalo I de $\mathbf{R}$.

Lo demostraremos por reducción al absurdo: supongamos que existe una *tal* función $\mathbf{m}$.

Por el axioma de Elección existe la sucesión de conjuntos$\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ acotados y disjuntos dos a dos, congruentes por traslación con $\mathbf{A}$,tal que:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

luego

$$1 = \mathbf{m}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \leq \mathbf{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mathbf{m}\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = 3$$

y por ser la sucesión de conjuntos$\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ disjuntos dos a dos:

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_k) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{A}) \leq 3$$

- Si $\mathbf{m}(\mathbf{A}) = 0$ entonces

$$1 \leq 0 \leq 3 \quad \text{contradicción}$$

- Si $\mathbf{m}(\mathbf{A}) > 0$ entonces por la propiedad arquimediana de los reales

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{A}) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \infty \leq 3 \;\; \text{contradicción}$$

■

Con el axioma de Elección, hemos asegurado la *existencia* el conjunto de elección **A,** llamado conjunto de Vitali, no numerable, al cual no se le puede asignar un valor en $[0,\infty]$ compatible con las propiedades 1, 2 y 3 exigidas a **m.** El axioma de Elección asegura la existencia de este conjunto pero no dice como se construye, si es que es posible.

¿Cuántos conjuntos **A** de Vitali *distintos* valen en la demostración?

Suponiendo la axiomatización de la Teiria de Conjuntos ZFC+HGC, siendo HGC la hipotesis del continuo generalizada, es decir

$$HC \overset{def}{\equiv} 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = \mathbf{c}$$

$$HGC \overset{def}{\equiv} 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}, \text{ con } \alpha \in Ordinales$$

Tendremos tantos conjuntos **A** de Vitali *distintos* como conjuntos de elección distintos de $\frac{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}{\backsim} = \left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}$, y conociendo la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

$$\left|\frac{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}{\backsim}\right| = \mathbf{c}$$

$$\left|[x] = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] : y = x + r \;,\; r \in \mathbf{Q}\right\}\right| = \aleph_0$$

tendremos la siguiente cantidad de posibles elecciones *distintas* y, por tanto, conjuntos de Vitali *distintos*

$$\underbrace{\aleph_0\aleph_0\cdots\aleph_0}_{\aleph_1 \text{ veces}} = \aleph_0^{\aleph_1} \overset{0\leq 1}{\equiv} 2^{\aleph_1} = \aleph_2 = 2^{\mathbf{c}} = |\wp(\mathbf{R})|$$

4.2 DEBILITAMIENTO DEL PROBLEMA DE LA MEDIDA PARA SUBCONJUNTOS DE LA RECTA REAL

Vamos ha debilitar las propiedades exigidas a **m** en busca de que el problema de la medida para subconjuntos de la recta real *tenga solución*, y que está sea *única.*

Esto se puede hacer de dos formas:

1. Si nos contentamos con que la función de conjunto $\mathbf{m}$ sea una medida, no ya sobre $\wp(\mathbf{R})$, sino sobre una clase de subconjuntos de $\mathbf{R}$ estrictamente contenida en $\wp(\mathbf{R})$, que tendrá estructura de σ-algebra. Conservando el resto de propiedades, es decir, invariante por *isometrías*, y *con* $\mathbf{m}([0,1]) = 1$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{m}(I) = longitud(I)$ para todo intervalo I de $\mathbf{R}$. Esto se logra mediante el llamado proceso de Carathéodory, es decir, restringiendo una cierta medida exterior sobre los elementos de una σ-algebra en la que la medida exterior será σ-aditiva

2. Si devilitamos la propiedad 3 que exige la *aditividad numerable* a la función de conjunto $\mathbf{m}$, por una propiedad más dévil que exija la *aditividad finita* a la función de conjunto $\mathbf{m}$, es decir:

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{m}(E_k)$$

para una familia *finita* $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \wp(\mathbf{R})$ disjuntos dos a dos.

4.2.1 LA IDEA DE LEBESGUE

Si suponemos el problema resuelto, es decir, que existe una función de conjunto $\mathbf{m}$ que sea una medida sobre una clase de subconjuntos de $\mathbf{R}$ estrictamente contenida en $\wp(\mathbf{R})$, que tendrá estructura de σ-algebra y llamaremos $\mathcal{M} \subset \wp(\mathbf{R})$, invariante por *isometrías*, y *con* $\mathbf{m}(I) = longitud(I)$ para todo intervalo I de $\mathbf{R}$.

En estas condiciones se dice que $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, \mathbf{m})$ es un *espacio de medida.*

Como $\mathbf{m}$ es monótona por ser una medida , tenemos para todo E donde esta definida $\mathbf{m}(E)$, es decir, $\forall E \in \mathcal{M}$ y cualquiera que sea el recubrimiento de E por una sucesión **infinita** $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de intervalos de $\mathbf{R}$**:**

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \mathbf{m}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} long(I_n)$$

Y si tomamos *ínfimo* cuando se toman todas las sucesiones infinitas de intervalos cuya unión cubrá E tenemos:

$$\mathbf{m}(E) \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} long(I_n) : \{I_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ recubrimiento de } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Pero el miembro de la derecha se puede definir para todo E de $\wp(\mathbf{R})$, lo que da lugar a la definición de la siguiente función de conjunto definida sobre $\wp(\mathbf{R})$:

$$\mathbf{m}^e : \wp(\mathbf{R}) \to [0, \infty]$$

$$E \to \mathbf{m}^e(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} long(I_n) : \{I_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ recubrimiento de } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

que llamaremos medida exterior de Lebesgue y verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{m}^e(E) = \emptyset$
2. $\forall A, B \in \wp(\mathbf{R})$
$$A \subset B \Longrightarrow \mathbf{m}^e(A) \leq \mathbf{m}^e(B)$$
3. (Invariante por traslaciones) Para todo $E \in \wp(\mathbf{R})$
$$\mathbf{m}^e(E + a) = \mathbf{m}^e(E)\, \forall a \in \mathbf{R}$$
4. (σ-subaditividad)
$$\mathbf{m}^e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}^e(E_n) \quad \forall \{E_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ , con } E_n \in \wp(\mathbf{R})$$
5.
$$\mathbf{m}^e(I) = \mathbf{m}(I) = long(I)$$

Pero $\mathbf{m}^e$ no verifica la propiedad de ser σ-aditiva.
Por tanto, si $\mathbf{m}(E)$ está definida tenemos:

$$\mathbf{m}(E) \leq \mathbf{m}^e(E)$$

Ademas, si suponemos que E está acotado, es decir, $E \subset [a, b]$, para cierto intervalo $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ podemos definir la *medida interior* de E

$$\mathbf{m}_i(E) = \mathbf{m}([a, b]) - \mathbf{m}^e([a, b] \cap E^c)$$

independientemente de $[a, b]$ y de si $\mathbf{m}(E)$ está definido.
Si, ademas, $\mathbf{m}(E)$ está definida tenemos:

$$\mathbf{m}_i(E) = \mathbf{m}([a, b]) - \mathbf{m}^e([a, b] \cap E^c) \leq \mathbf{m}([a, b]) - \mathbf{m}([a, b] \cap E^c) = \mathbf{m}(E)$$

luego para todo E donde esta definida $\mathbf{m}(E)$, es decir, $\forall E \in \mathcal{M}$ se verifica

$$\mathbf{m}_i(E) \leq \mathbf{m}(E) \leq \mathbf{m}^e(E)$$

Y si nos restringimos a los E de $\wp(\mathbf{R})$ tales que

$$\mathbf{m}_i(E) = \mathbf{m}^e(E)$$

a los que llameremos conjuntos *medibles Lebesgue* que colecciono en $\mathcal{L} \subset \wp(\mathbf{R})$,tendremos la solución al problema dada por $\mathbf{m}^e$ restringida a $\mathcal{L}$, pues, entonces $\mathbf{m} = \mathbf{m}^e\Big|_{\mathcal{L}}$ verificará las propiedades 1, 2 y 3; la 1 y 2 por ser $\mathbf{m} = \mathbf{m}^e$ en $\mathcal{L}$, y la 3 por ser $\mathbf{m} = \mathbf{m}^e = \mathbf{m}_i$ en $\mathcal{L}$, siendo $\mathbf{m}^e$ σ-subaditividad y $\mathbf{m}_i$ σ-superaditividad.

Por tanto $\mathbf{m}(E)$ está definido para todo $\forall E \in \mathcal{L}$, en donde $\mathbf{m}_i(E) = \mathbf{m}^e(E)$ y para cualquier otra medida $\mathbf{m}'$verificando 1, 2, 3 tenemos

$$\mathbf{m}_i(E) = \mathbf{m}'(E) = \mathbf{m}^e(E) \Rightarrow \mathbf{m}'(E) = \mathbf{m}(E)$$

para todo E en $\mathcal{L}$

y, por tanto, tenemos, al menos, **existencia** y **unicidad** de solución al problema de la medida para los conjuntos *medibles Lebesgue*, siendo

$$\mathbf{m} : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$$

$$\mathbf{m}(E) = \mathbf{m}^e(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} long(I_n) : \{I_n\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ recubrimiento de } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Se puede demostrar que la clase de los conjuntos *medibles Lebesgue* $\mathcal{L} \subset \wp(\mathbf{R})$ es una σ-algebra.

En particular para los conjuntos J con contenido de Jordan, es decir, con

$$\mathbf{c}_i(J) = \mathbf{c}^e(J)$$

tenemos

$$\mathbf{c}_i(J) \leq \mathbf{m}_i(J) \leq \mathbf{m}^e(J) \leq \mathbf{c}^e(J) \overset{\mathbf{c}_i(J)=\mathbf{c}^e(J)}{\Rightarrow} \mathbf{m}_i(J) = \mathbf{m}^e(J)$$

y por tanto los conjuntos con contenido de Jordan serán conjuntos *medibles Lebesgue,* es decir, vivirán en $\mathcal{L}$ y tendran la misma medida $\mathbf{m}(J) = \mathbf{c}(J)$

Además, como el subconjunto de $\mathbf{R}$

$$\mathbf{Q} \cap [0, 1]$$

no tiene contenido, pues

$$0 = \mathbf{c}_i(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) < \mathbf{c}^e(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) = 1$$

pero es *medibles Lebesgue,* pues

$$0 \leq \mathbf{m}_i(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) \leq \mathbf{m}^e(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) = 0 \Rightarrow \mathbf{m}_i(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) = \mathbf{m}^e(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

y, por tanto:

$$\mathbf{m}(\mathbf{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

Tenemos, en consecuencia, que el concepto de conjunto *medible Lebesgue* extiende al concepto de conjunto con *contenido de Jordan.*

4.2.2 EL PROCESO DE CARATHÉODORY

En su formulación más abstracta el proceso de Carathéodory permite obtener una medida (σ-aditividad) a partir de una medida exterior (σ-subaditividad) restringiendo la medida exterior a una clase de subconjuntos de $\mathbf{R}$, que tendrá estructura de σ-algebra.

Definición 32 *Dado un conjunto* $\boldsymbol{X}$, *una función* $\mathbf{m}^e$ *de conjunto:*

$$\mathbf{m}^e : \wp(\mathbf{R}) \to [0, \infty]$$

se dice que es una **medida exterior** si cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbf{m}^e(\emptyset) = 0$
- (monotonía) $\forall A, B \in \wp(\mathbf{X}) A \subset B \Longrightarrow \mathbf{m}^e(A) \leq \mathbf{m}^e(B)$
- (σ-subaditividad)

$$\mathbf{m}^e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}^e(A_n)\ \ \forall \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \text{ con } A_n \in \wp(\mathbf{X}).$$

Definición 33 $A \in \wp(\mathbf{X})$ *se dice* m^e***-medible*** *o exteriormente medible si*

$$\forall T \in \wp(\mathbf{X}) \quad \mathbf{m}^e(T) = \mathbf{m}^e(T \cap A) \cap \mathbf{m}^e(T \cap A^c)$$

Si colecionamos los conjuntos m^e**-medible** en

$$\mathcal{M}_{m^e} = \{A \in \wp(\mathbf{X}) : A \text{ es } \mathbf{m}^e\!-\!\textit{medible}\}$$

verificandose:

- $\mathcal{M}_{m^e}$ es una σ-álgebra
- $\mathbf{m}^e$ restringida a $\mathcal{M}_{m^e}$

$$\mathbf{m}^e : \mathcal{M}_{m^e} \to [0, \infty]$$

es una medida (σ-aditividad) completa.

Capítulo 5

TEOREMAS DE CONVERGENCIA PARA LA INTEGRAL DE LEBESGUE

5.1 TEOREMAS

5.1.1 TEOREMA DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA

Teorema 34 *(TEOREMA DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA) Sea* $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$\mathbf{f}_n \colon \mathbf{X} \to [0, \infty]$$

con $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *una sucesión creciente de funciones medibles Borel no negativas tales que convergen al límite puntual en* $\mathbf{X}$

$$\mathbf{f}\,(x) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{f}_n(x)$$

es decir,

$$\mathbf{f}_n \nearrow \mathbf{f} \quad \mu\text{-}c.t.p.$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu = \int_{\mathbf{X}} \lim_{n \to \infty} \mathbf{f}_n d\mu$$

$$\int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu \underset{n \to \infty}{\nearrow} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f} d\mu$$

¿Es cierto el Teorema de la convergencia monótona en su versión para integrales en el sentido de Riemann?

Pues **no,** veamoslo con un contraejemplo:

Como $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ es un conjunto numerable, consideramos la sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de los números racionales de $[0, 1]$ y consideremos la sucesión de funciones

$$\mathbf{f}_n \colon [0, 1] \to \mathbf{R}$$

$$x \to \mathbf{f}_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \end{cases}$$

$\mathbf{f}_n$ es Riemann-integrable pues si consideramos el conjunto de puntos de discontinuidad de $\mathbf{f}_n$

$$D = \{x \in \mathbf{R} : \mathbf{f}_n \text{ discontinua}\} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$$

que por ser finito tiene medida cero, y por tanto, por el teorema de Lebesgue, $\mathbf{f}_n$ es integrable en el sentido de Riemann. Y

$$\overline{\int_0^1} \mathbf{f}_n = \underline{\int_0^1} \mathbf{f}_n = 0$$

para todo $n \in \mathbf{N}$

$\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es, por tanto, una sucesión creciente de funciones *Riemann-integrables* no negativas tales que convergen al límite puntual en $[0,1]$

$$\mathbf{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x) = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{I}\cap[0,1] \end{cases}$$

con $\mathbf{f}$ **no** es Riemann-integrable pues si consideramos el conjunto de puntos de discontinuidad de $\mathbf{f}$

$$D = \{x \in \mathbf{R} : \mathbf{f} \text{ discontinua}\} = [0,1]$$

que **no** tiene medida cero, y por tanto, por el teorema de Lebesgue, $\mathbf{f}_n$ **no** es integrable en el sentido de Riemann.

Además

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{f}_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^1 \mathbf{f}(x)dx \textbf{no existe}$$

luego *no se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx$$

pues ni siquiera existe el segundo miembro.

5.1.2 TEOREMA DE BEPPO-LEVÍ

Teorema 35 *(TEOREMA DE BEPPO-LEVÍ) Sea* $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$\mathbf{f}_n \colon \mathbf{X} \to [0, \infty]$$

con $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una sucesión de funciones medibles Borel* ***no negativas,*** *es decir,*

$$\mathbf{f}_n(x) \geq 0 \forall x \in \mathbf{X}$$

Entonces

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu$$

5.1.3 LEMA DE FATOU

Teorema 36 *(LEMA DE FATOU) Sea* $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$\mathbf{f}_n, \mathbf{f} : \mathbf{X} \to \overline{\mathbf{R}}$$

con $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una sucesión de funciones medibles Borel, y* $\mathbf{f}$ *una función medible Borel entonces*

- *Si* $\mathbf{f}_n \geq \mathbf{f} \forall \mathbf{n}$ *siendo* $\int_{\mathbf{X}} \mathbf{f} d\mu > -\infty$*, entonces*

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{f}_n \right) d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu$$

- *Si* $\mathbf{f}_n \leq \mathbf{f} \forall \mathbf{n}$ *siendo* $\int_{\mathbf{X}} \mathbf{f} d\mu < \infty$*, entonces*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu \leq \int_{\mathbf{X}} \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{f}_n \right) d\mu$$

5.1.4 TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA

Teorema 37 *(TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA) Sea* $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$\mathbf{f}_n, \mathbf{f} : \mathbf{X} \to \overline{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{g} : \mathbf{X} \to [0, \infty]$$

con $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una sucesión de funciones medibles Borel, tales que* $\mathbf{f}_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{f}$ μ*-c.t.p.*

con $\mathbf{g}$ *una función medible Borel e integrable en el sentido de Lebesgue, o lo que es igual* $\mathbf{g} \in L^1(\mu)$*, verificando* $|\mathbf{f}_n| \leq \mathbf{g}$ μ*-c.t.p.* $\forall \mathbf{n}$

Entonces $\mathbf{f}$ *es integrable en el sentido de Lebesgue y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f}_n d\mu = \int_{\mathbf{X}} \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n d\mu = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{f} d\mu$$

¿Es cierto el Teorema de la convergencia dominada en su versión para integrales en el sentido de Riemann?

Pues **no,** y lo veremos con un contraejemplo:

Como $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ es un conjunto numerable, consideramos la sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de los números racionales de $[0,1]$ y consideremos la sucesión de funciones

$$\mathbf{f}_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$$

$$x \to \mathbf{f}_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \end{cases}$$

$\mathbf{f}_n$ es Riemann-integrable. Y

$$\int_0^1 \mathbf{f}_n = 0$$

para todo $n \in \mathbf{N}$

$\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es, por tanto, una sucesión de funciones *Riemann-integrables* tales que convergen al límite puntual en $[0,1]$

$$\mathbf{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x) = \chi_{\mathbf{Q}\cap[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{I}\cap[0,1] \end{cases}$$

con **f no** es Riemann-integrable.

Además

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{f}_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^1 \mathbf{f}(x)dx\textbf{no existe}$$

luego *no se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx$$

pues ni siquiera existe el segundo miembro.

Y sin embargo existe una función

$$\mathbf{g} : [0,1] \to [0,\infty]$$

$$x \to \mathbf{g}(x) = 1$$

con **g** una función Riemann-integrable verificando

$$|\mathbf{f}_n(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0,1]$$

es decir $|\mathbf{f}_n| \leq \mathbf{g}$. $\forall\mathbf{n}$

5.2 EJERCICIOS

Ejercicio 38 *Sea $a < -1$*

Calcula:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}dx$$

Consideramos la sucesión de funciones $\mathbf{f}_n\colon (0,\infty)\to\mathbf{R}$ tales que

$$x\to\mathbf{f}_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\boldsymbol{\chi}_{[0,n]}$$

$\left\{\mathbf{f}_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\boldsymbol{\chi}_{[0,n]}\right\}$ *es una sucesión de funciones* ***medibles no negativas*** *en $(0,\infty)$.*

Veamos que $\{\mathbf{f}_n(x)\}$ es una sucesión de funciones ***monótona creciente*** *en $(0,\infty)$ con función límite puntual $\mathbf{f}:(0,\infty)\to\mathbf{R}$*

$$x\to\mathbf{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\boldsymbol{\chi}_{[0,n]}=e^xe^{ax}=e^{(a+1)x}$$

$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales creciente*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\underset{n\to\infty}{\nearrow}e^x$$

multiplicando por la constante e^{ax}

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\leq\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}e^{ax}\underset{n\to\infty}{\nearrow}e^xe^{ax}$$

Luego nos encontramos en las hipotesis del ***teorema de la convergencia monótona:***

$\{\mathbf{f}_n(x)\}$ es una sucesión de funciones ***monótona creciente medibles no negativas*** *en $(0,\infty)$ con función límite puntual $\mathbf{f}$, es decir, $\mathbf{f}_n\underset{n\to\infty}{\nearrow}\mathbf{f}$ en $(0,\infty)$*
Luego

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\mathbf{f}_n(x)dx=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}_n(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{ax}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\mathbf{f}_n(x)dx=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}_n(x)dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{(a+1)x}dx\overset{a\leq-1}{=}-\frac{1}{1+a}$$

Pues si $\left.\begin{array}{c}\mathbf{f} \geq 0 \\ \mathbf{f} \text{ es integrable Riemann impropia}\end{array}\right\}$ $\mathbf{f}$ *es* ***integrable Lebesgue*** *y las integrales coinciden*

1.

$$\mathbf{f}(x) = e^{(a+1)x} \geq 0 \;\; en \;\; (0, \infty)$$

2.

$$\int_0^{\infty} e^{(a+1)x} dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{(a+1)x} dx = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{e^{(a+1)x}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{(a+1)k}}{a+1} - \frac{1}{1+a}\right) \overset{a<-1}{=} -\frac{1}{1+a} < \infty$$

y por tanto $\mathbf{f}$ *es integrable Riemann impropia en* $(0, \infty)$

Ejercicio 39 *Calcula:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx$$

Consideramos la sucesión de funciones $\mathbf{f}_n \colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *tales que*

$$x \to \mathbf{f}_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \boldsymbol{\chi}_{[0,n]}$$

$\left\{\mathbf{f}_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \boldsymbol{\chi}_{[0,n]}\right\}$ *es una sucesión de funciones* ***medibles*** *en* $(0, \infty)$.

Definimos la función límite puntual $\mathbf{f} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *por :*

$$x \to \mathbf{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \boldsymbol{\chi}_{[0,n]} = e^{-x} e^{-x} = e^{-2x}$$

Como

$$|\mathbf{f}_n(x)| = \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \boldsymbol{\chi}_{[0,n]}\right| \leq e^{-x} \boldsymbol{\chi}_{[0,n]} \leq e^{-x}$$

Tomando la función $\mathbf{g} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$

$$x \to \mathbf{g}(x) = e^{-x}$$

que verifica

$$\int_0^{\infty} \mathbf{g}(x) dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-x} dx = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{-k}}{-1} + 1\right) = 1 < \infty$$

tenemos $\left.\begin{array}{c}\mathbf{g}\geq 0\\ \mathbf{g}\ \textit{es integrable Riemann impropia}\end{array}\right\}$ $\mathbf{g}$ *es* ***integrable Lebesgue*** *y las integrales coinciden*

$$\int_{(0,\infty)}\mathbf{g}d\lambda=\int_0^\infty \mathbf{g}(x)dx=1<\infty$$

y por tanto, estamos en las hipotesis del ***teorema de la convergencia dominada,*** *pues* $|\mathbf{f}_n|\leq\mathbf{g}$ *con* $\mathbf{g}$ *medible e integrable Lebesgue en* $(0,\infty)$.

Luego podemos intercambiar el límite y la integral resultando:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathbf{f}_n(x)dx=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}_n(x)dx=$$

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx\overset{T.C.M.}{=}\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-2x}\boldsymbol{\chi}_{[0,k]}dx=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,k]}e^{-2x}dx\overset{(*)}{=}$$

por ser los integrandos de las integrales de la sucesión acotados y Riemann-integrables en un intervalo cerrado y acotado $[0,k]$, *entonces serán integrables-Lebesgue y las integrales coincidirán, es decir,*

$$\int_{[0,k]}e^{-2x}dx=\int_0^k e^{-2x}dx=\frac{1-e^{-2k}}{2}$$

por tanto:

$$\overset{(*)}{=}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-e^{-2k}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 40 *Calcula:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}dx$$

Denotamos la sucesión de integrandos por $\mathbf{f}_n\colon(0,\infty)\to\mathbf{R}$ *tales que*

$$x\to\mathbf{f}_n(x)=\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}$$

Definimos la función límite puntual $\mathbf{f}:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ *por:*

$$x\to\mathbf{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}$$

Luego $\mathbf{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{f}(x)\ \forall x \in (0,\infty)$, *es decir,* $\boldsymbol{f}$ *es el limite* ***puntual*** *de* $\boldsymbol{f}_n$

$$\mathbf{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}} =$$

Por ser

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Y

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = x^0 = 1$$

tendremos, al final, que:

$$\mathbf{f}(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

Supongamos que se dan las condiciones para que el cálculo del límite de una sucesión de integrales sea lo mismo que el cálculo de la integral del límite puntual de los integrandos,es decir, que podemos intercambiar límite e integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx$$

Entonces tendríamos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^\infty \mathbf{f}(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

Pues

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^M = \lim_{n\to\infty} (1-e^{-M}) = 1$$

lo que significaría que $\mathbf{f}(x) = e^{-x}$ *es integrable Riemann impropia en* $(0,\infty)$ *y* $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$. *Y como* $\mathbf{f}(x) = e^{-x} \geq 0, x \in (0,\infty)$ *entonces* $\mathbf{f}$ *es integrable Lebesgue en* $(0,\infty)$ *respecto la medida de longitud extendida a los borelianos de la recta real. Y el valor de su integral de Lebesgue en* $(0,\infty)$ *es igual al valor de su integral de Riemann impropia en* $(0,\infty)$,*que es* 1.

Veamos, pues, que se pueden intercambiar el límite y la integral utilizando el teorema de la convergencia dominada:

$\left\{\mathbf{f}_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}\right\}$ *es una sucesión de funciones medibles e integrables en* $(0,\infty)$, *pues las* $\boldsymbol{f}_n$ *son continuas y positivas en* $(0,\infty)$.

Luego para estar en las hipotesis del teorema de la convergencia dominada solamente necesitamos encontar una función $\mathbf{g} : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ *medible e integrable tal que* $|\mathbf{f}_n| \leq \mathbf{g}$ *para todo* $n \geq 2$ *en* $(0,\infty)$.

$|\mathbf{f}_n| = \mathbf{f}_n$ pues $\mathbf{f}_n \geq 0$ en $(0,\infty)$

$$\mathbf{f}_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}\boldsymbol{\chi}_{(0,\infty)}(x) = \mathbf{f}_n(x)\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x) + \mathbf{f}_n(x)\boldsymbol{\chi}_{(1,\infty)}(x) \leq g_1\boldsymbol{\chi}_{(0,1]} + g_2\boldsymbol{\chi}_{(1,\infty)} \overset{def}{=} \mathbf{g}\ \forall n \geq 2$$

Tomamos:

- $g_1\colon (0,1] \to \mathbf{R}$ definida por:

$$x \to g_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

pues

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} \overset{x>0}{\leq} \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \overset{0<x\leq 1 \text{ y } n\geq 2}{\leq} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ \forall x \in (0,1] \text{ y } \forall n \geq 2$$

- $g_2\colon (1,\infty) \to \mathbf{R}$ definida por:

$$x \to g_2(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}$$

pues

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} \overset{x>1}{\leq} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \overset{x\geq 0 \text{ y } n\geq 2}{\leq} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}\ \forall x \in (1,\infty) \text{ y } \forall n \geq 2$$

Definimos la siguiente función:

$\mathbf{g}(x) \overset{def}{=} g_1\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x) + g_2\boldsymbol{\chi}_{(1,\infty)}(x)$ es **medible** pues g_1 y g_2 son continuas en $(0,\infty)$

Solamente nos queda ver que $\mathbf{g}$ es **integrable Lebesgue** en $(0,\infty)$. Esto lo comprobaremos viendo que tanto $g_1\boldsymbol{\chi}_{(0,1]}(x)$ como $g_2\boldsymbol{\chi}_{(1,\infty)}(x)$ son **integrable Lebesgue** en $(0,\infty)$. Pues, entonces, la *suma*, es decir, **g,** es **integrable Lebesgue** en $(0,\infty)$

Como tanto g_1 como g_2 son *no negativas* en sus respectivos dominios de definicón, si demostramos que son integrables Riemann impropias en sus respectivos dominios de definicón, entonces serán **integrable Lebesgue.** Y estaremos en las hipótesis del teorema *de la convergencia dominada*

- Veamos que $\int_0^1 g_1 dx < \infty$

$$\int_0^1 g_1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\delta\to 0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0}(2 - 2\delta^{\frac{1}{2}}) = 2$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{c} g_1 \text{ es integrable Riemann impropia} \\ g_1 \geq 0 \end{array}\right\} \mathrm{g}_1 \text{ es } \textbf{integrable Lebesgue}$$

- Veamos que $\int_1^\infty g_2 dx < \infty$

$$\int_1^\infty g_2 dx = \int_1^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} dx <$$

Como $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 \overset{x>1}{>} \frac{x^2}{4}$ con $x \in (1, \infty)$

$$< \int_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4}} dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{4}{x^2} dx = 4 \lim_{M\to\infty} (1 - \frac{1}{M}) = 4 < \infty$$

- Por tanto

$$\left.\begin{array}{c} g_2 \text{ es integrable Riemann impropia} \\ g_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{g}_2 \text{ es } \textbf{integrable Lebesgue}$$

Ejercicio 41 *Calcula:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x dx$$

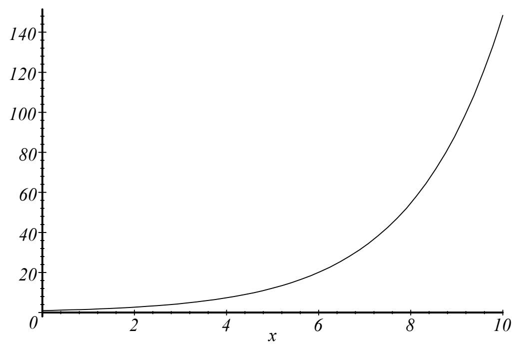
Consideramos la sucesión de funciones $\mathbf{f}_n\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *tales que*

$$x \to \mathbf{f}_n(x) = \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x \boldsymbol{\chi}_{[0,n]} \geq 0$$

Con función límite puntual $\mathbf{f} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$

$$x \to \mathbf{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x \boldsymbol{\chi}_{[0,n]} = e^{-\frac{x}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}x}$$

Sinedo $\mathbf{f}(x) = e^{\frac{1}{2}x}$



Por tanto,

$$\mathbf{f} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{f}_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{f}_n$$

Tenemos

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x dx = \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^\infty \mathbf{f}_n(x)dx \geq$$

Aplicando el lema de Fatou, pues $\mathbf{f}_n \geq 0$ *siendo* $\int_0^\infty 0dx = 0 > -\infty$

$$\geq \int_0^\infty \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{f}_n(x)dx = \int_0^\infty \mathbf{f}(x)dx = \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x}dx = \infty$$

luego

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x dx = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x dx = \infty$$

Ejercicio 42 *Si* $1 < p < 2$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+(nx)^p}dx = 0$$

Como $0 < x < 1$

$$\left|\frac{nx\sin x}{1+(nx)^p}\right| \leq \frac{nx}{1+(nx)^p} \leq \frac{nx}{(nx)^p} = \frac{1}{n^{p-1}x^{p-1}} \overset{p-1>0}{\leq} \frac{1}{x^{p-1}}$$

Si definimos

$$\mathbf{g} : [0,1] \to [0,\infty]$$

$$x \to \mathbf{g}(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$$

Como $\mathbf{g}$ *es continua, y por lo tanto,* $\mathbf{g}$ *es una función medible Borel y además como* $\mathbf{g}$ *es una función Riemann- integrable en* $[0,1]$ *pues*

$$\int_0^1 \mathbf{g}(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}dx < \infty \text{ para } 0 < p-1 < 1$$

lo que implica que $\mathbf{g}$ *es integrable en el sentido de Lebesgue en* $[0,1]$*, o lo que es igual* $\mathbf{g} \in L^1(\mu)$*. Verificandose también* $|\mathbf{f}_n| \leq \mathbf{g}$ μ*-c.t.p.* $\forall \mathbf{n}$ *lo que nos pone en las hipotesis del* ***Teorema de la convergencia dominada.***

Que permite intercambiar el límite y la integral

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+(nx)^p}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx\sin x}{1+(nx)^p}dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Ejercicio 43 *Calcula*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\cos x dx$$

Como $0 < x < 1$

$$\left|\frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\cos x\right| = \frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\left|\cos x\right| \overset{(*)}{\leq}$$

$$(*)\quad \frac{\log(n+x)}{n} \leq \frac{\log(n+1)}{n} \leq \underbrace{\frac{\log(n+1)}{n+1}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\leq 1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n$$

$$\leq 2e^{-x}\left|\cos x\right| \overset{0<x<1}{\leq} 2 \quad \forall n$$

Si definimos

$$\mathbf{g} : [0,1] \to [0,\infty]$$

$$x \to \mathbf{g}(x) = 2$$

Como $\mathbf{g}$ *es continua, y por lo tanto,* $\mathbf{g}$ *es una función medible Borel y además como* $\mathbf{g}$ *es una función Riemann- integrable en* $[0,1]$ *pues*

$$\int_0^1 \mathbf{g}(x)dx = \int_0^1 2dx = 2 < \infty$$

lo que implica que $\mathbf{g}$ *es integrable en el sentido de Lebesgue en* $[0,1]$*, o lo que es igual* $\mathbf{g} \in L^1(\mu)$*. Verificandose también* $|\mathbf{f}_n| \leq \mathbf{g}$ μ*-c.t.p.* $\forall \mathbf{n}$*, lo que nos pone en las hipotesis del* ***Teorema de la convergencia dominada.***

Que permite intercambiar el límite y la integral

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\cos x dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+x)}{n}e^{-x}\cos x dx = \int_0^1 0dx = 0$$