



Facultat de física
Departament d'Estructura
i Constituents de la Matèria

Curso de doctorado
Física Avanzada

Introducción a los Fenomenos Críticos y al Grupo de Renormalización

José María Sancho

Bienio 2003-2005

Copyright: José M. Sancho
Edición privada (2004)
Para cualquier comentario, corrección
o intercambio de información contactar
con: **jmsancho@ecm.ub.es**.

Índice general

Índice general	I
Prólogo	V
1. Perspectiva histórica	1
1.1. Introducción	1
1.2. El período clásico: 1869-1944	2
1.2.1. El punto crítico líquido-gas	2
1.2.2. Punto de Curie de un ferromagnético.	2
1.2.3. El fenómeno de la opalescencia crítica	3
1.2.4. Comportamiento crítico de las mezclas binarias	4
1.2.5. Universalidad de las transiciones de segundo orden: La teoría de Landau	5
1.3. La revolución de Onsager: 1944-1965	6
1.4. La Reconciliación de Onsager: 1965-1971	7
1.5. Respectabilidad: 1971-1977	8
1.6. La era de las nuevas criticalidades: 1977-.....	9
I Grupo de renormalización estático	13
2. El grupo de renormalización estático	15
2.1. Introducción	15
2.2. Scaling	16
2.2.1. Leyes de Scaling	17
2.2.2. Funciones de Scaling	18
2.3. El grupo de renormalización	18
2.3.1. El método de Kadanoff y la hipótesis de scaling	18
2.3.2. Generalidades básicas del Grupo de Renormalización	20
2.4. Universalidad	23
2.4.1. Puntos fijos, puntos críticos y universalidad	23
2.4.2. Ejemplos de clases de universalidad	23
2.5. Conclusiones	25
Apéndice 2.A. La hipótesis de scaling en la función de correlación	25
3. Grupo de renormalización en espacio real	29
3.1. Introducción	29
3.2. Sistemas en una dimension	30
3.2.1. El modelo de Ising ferromagnético en una dimensión	30
3.2.2. Modelo de Ising antiferromagnético en dimensión 1	34
3.2.3. Modelo esférico	39
3.3. Modelos en dos dimensión	42
3.3.1. Modelo de Ising en la red cuadrada	42

3.3.2. El modelo de Ising en la red triangular	45
4. Grupo de renormalización en espacio de momentos	53
4.1. Introducción	53
4.2. Procedimientos básicos	53
4.3. Modelo gaussiano (ϕ^2)	54
4.3.1. Motivación y derivación	54
4.3.2. Renormalización del modelo	56
4.4. Modelo de Ginzburg-Landau-Wilson (ϕ^4)	58
4.4.1. Motivación	58
4.4.2. Renormalización del modelo	59
Apéndice 4.A. Aspectos matemáticos	69
4.A.1. Transformadas de Fourier	69
4.A.2. Relación entre expresiones en la red y en el continuo	69
4.A.3. Funciones de correlación y estructura: Teorema de Wick	69
5. Grupo de renormalización en percolación	73
5.1. Introducción	73
5.2. Definiciones	73
5.3. Percolación en una dimensión (site percolation)	74
5.4. <i>Bond percolation</i> en una red cuadrada	76
II Grupo de renormalización dinámico	79
6. Introducción al Grupo de Renormalización Dinámico	81
6.1. Nuevos conceptos y definiciones	81
6.2. Prescripciones básicas del grupo de renormalización dinámico	83
6.3. La función de correlación espacio-temporal	83
6.4. Grupo de renormalización dinámico en el Espacio Real: un ejemplo	84
7. Grupo de renormalización dinámico de equilibrio: dinámica crítica	87
7.1. Modelo gaussiano dinámico	87
7.2. Modelo Ginzburg-Landau-Wilson dinámico	89
7.2.1. Análisis de Escala	89
7.2.2. Solución formal diagramática	90
7.2.3. Eliminación de variables en espacio de momentos	90
8. Grupo de renormalización dinámico de no equilibrio: crecimiento superficial	95
8.1. Modelos de crecimiento superficial	95
8.1.1. Definiciones	95
8.1.2. Modelo de deposición al azar	96
8.1.3. Modelo de deposición al azar con relajación superficial	97
8.1.4. Modelo de deposición al azar con relajación superficial y crecimiento lateral (KPZ)	98
8.1.5. Modelo de crecimiento Molecular Beam Epitaxy (MBE)	98
8.2. Grupo dinámico de renormalización del modelo KPZ	99
8.2.1. Análisis preliminares	99
8.3. Aplicación del grupo de renormalización dinámico	100
8.3.1. Eliminación o integración de los modos de Fourier altos	101
8.3.2. Transformaciones de escala y ecuaciones de flujo	103
8.3.3. La función de correlación	104
Apéndice 8.A. Problemas de crecimiento superficial	105
Bibliografía	107

Índice general

III

Índice alfabético

109

Prólogo

Un poco de historia

Hay temas que le persiguen a uno toda la vida, y en mi caso, el Grupo de Renormalización es uno de ellos.

No había empezado todavía la carrera (antes de 1970), ni Wilson había escrito el primer artículo sobre el Grupo de Renormalización cuando ya me topé con una versión artística del mismo. En una revista científica española de divulgación (IBERICA) encontré un artículo que me impactó en el que aplicaban las futuras técnicas de Kadanoff en el campo de las artes plásticas. Tomaban un cuadro o pintura y lo subdividían en celdas muy pequeñas que contenían varios pixels de colores diferentes. Sustituían ahora todos los pixes de cada celda por un único color, el mayoritario, y volvían a ver que aspecto tenía el dibujo. Se preguntaban cuantos pasos se podrían hacer hasta que fuera irreconocible el tema inicial de la pintura. No era más que el proceso de *blocking* de Kadanoff aplicado a un sistema sin invarianza de escala.

Los siguientes encuentros son ya más recientes y se inician justamente en el último año de mi carrera cuando asistí a la Escuela de Sitges de 1976 sobre *Critical Phenomena* y que contó con la presencia de Kadanoff, Migdal, Ma y Green entre otros pioneros en el desarrollo del Grupo de Renormalización. La verdad es que no entendí apenas nada pero me quedaron recuerdos nebulosos de la charla de Kadanoff sobre una serie de puntos y líneas que desaparecían de la pantalla después de ciertas manipulaciones abstractas.

De vuelta de este congreso el profesor Luis Garrido me propuso el tema de mi tesis: *construir el grupo de renormalización dinámico*. El tema no era nada fácil pero lo peor fué que ya estaba bastante desarrollado por muchos autores: el libro de Ma es de 1976 y el Review Modern Physics de Hohenberg y Halperin del 1977. En estas referencias se desarrolla el Grupo de Renormalización dinámico para el estudio de la dinámica crítica. Por el mismo tiempo Foster-Nelson-Stephen (1977) presentan el grupo de Renormalización dinámico para sistemas fuera de equilibrio.

No me desanimé por ello y continué sobre el tema hasta que finalmente publiqué un pequeño artículo en 1978 (mi primer artículo !) sobre el Grupo de Renormalización Dinámico y su relación con la ecuación de Fokker-Planck. Como no ví muy claro mi progreso en el tema decidí explorar las posibilidades de la ecuación de Fokker-Planck para el tratamiento de procesos estocásticos no markovianos. Tema que por ser novedoso en aquel tiempo permitía obtener bastantes resultados originales.

En 1980 durante una corta estancia de postdoc en la Universidad de Temple (Filadelfia) entré en contacto con los profesores Foster y Kawasaki renombrados especialistas del Grupo de Renormalización Dinámico pero preferí colaborar con el profesor Gunton en problemas estocásticos con ruidos no blancos y de cuya colaboración salió mi artículo más citado. Sin embargo logré también publicar un pequeño artículo sobre relaciones de scaling dinámicas que tuvo bastantes citas en revistas de altas energías.

No es hasta 1995 que vuelvo a interesarme sobre el Grupo de Renormalización dinámico durante la dirección de la tesis de Jordi García Ojalvo. En ella logramos encontrar las correcciones debidas a ruidos no blancos sobre los resultados conocidos de dinámica crítica para el modelo de Ginzburg–Landau de equilibrio. Este resultado apareció publicado en 1998 y una descripción detallada de las técnicas del Grupo de Renormalización Dinámico fueron incluidas en nuestro libro del 1999.

Si bien este recorrido por el Grupo de Renormalización fué parcialmente fructífero ello me dejó un

cierto interés por el tema que todavía no he perdido, y por ello acepté impartir un curso de doctorado sobre este tema.

Sobre este texto

El texto que aquí se presenta contiene las notas de clase del curso de doctorado del mismo nombre que he estado impartido durante los años 2002-2004. El material ha salido de diferentes referencias que se indican en la bibliografía buscando un esquema más autoconsistente y completo. También contiene alguna aportación personal.

Mi idea al aceptar la impartición de este curso era dar una visión general de las técnicas, y conceptos del Grupo de Renormalización que fueran de utilidad para cualquier alumno de doctorado con ciertas inquietudes teóricas interdisciplinarias. En este sentido el mayor énfasis está dirigido en la dirección de sistemas macroscópicos con el fin de preparar al alumno en la explosión de criticalidades de no equilibrio que han aparecido en los últimos años.

Si bien existen otras formulaciones teóricas más potentes del Grupo de renormalización tanto estático como dinámico, yo he preferido seguir la más clásica que posee más sentido físico y que puede servir de base para ampliaciones posteriores.

El fin del curso es dar una formación lo más genérica posible pero también práctica que facilite a los alumnos, independientemente de su especialidad, entender los principios básicos del Grupo de Renormalización, usar apropiadamente la terminología: scaling, universalidad, renormalización, relevancia, etc. y practicar las técnicas más elementales de esta disciplina.

Agradecimientos

Este texto no habría sido posible en tan poco tiempo sin la colaboración entusiasta de los alumnos que han ido asistiendo al curso y que hicieron el esfuerzo de pasar a LATEX las clases lectivas y problemas propuestos. Durante el primer año se pasaron a limpio los temas del Grupo de Renormalización Estático con la ayuda de: David Nevado, Juan Rojo, Antonio Ramírez, Jan Brugés, Román Orús y Raül Sánchez.

Durante el segundo año se procedió a la revisión profunda y sistemática de todo el trabajo anterior añadiendo la parte dinámica, algún tema nuevo y una edición más cuidada y consistente. Este trabajo fue realizado por: Isaac Llopis, Xavier Moya, Ramón Planet, Felix Campelo, Miquel Nofrarias, Pau Figueras, Jaume López, Jorge Mondejar, Aleix Ciudad, Pau Cervera, y Otger Campàs.

Quiero añadir un especial agradecimiento a Jaume López por asumir la responsabilidad de cuidarse de toda la compilación ordenada en LATEX de esta obra.

No creo que este texto esté libre de errores, así que serán muy agradecidos los comentarios a este respecto.

Estoy convencido de que este documento será un buen recuerdo para los que han participado en su elaboración.

Barcelona, Enero 2004.

Capítulo 1

Perspectiva histórica

1.1. Introducción

En el presente capítulo vamos a llevar a cabo un breve recorrido por la historia de los fenómenos críticos siguiendo el esquema de Domb [Dom85] con alguna aportación nueva. Presentaremos una especial atención a la aparición sucesiva de los nuevos conceptos generales para el estudio de los fenómenos críticos. Ésta puede dividirse en los siguientes periodos:

1869–1944 El período clásico. Se inicia con la introducción del término *punto crítico* por parte de Thomas Andrews en 1869. Datan de este período la ecuación de Van der Waals para los gases; los avances en el modelo ferromagnético llevados a cabo por Curie , Langevin y Weiss ; la introducción de la función de correlación por parte de Ornstein-Zernike ; la introducción, debida a Landau , del concepto *parámetro de orden* o la obtención, por parte de Bragg y Williams, de una expresión matemática para el parámetro de orden de una mezcla binaria . Todas estas ecuaciones teóricas tienen un origen experimental.

1944–1965 La revolución de Onsager. Onsager obtuvo la solución exacta de un modelo ferromagnético sencillo en dos dimensiones y resultó estar en total desacuerdo con los resultados clásicos. Siguiendo la línea iniciada por Onsager se resolvieron exactamente varios modelos, se implementaron técnicas numéricas que hacen uso de computadores y se desarrollaron nuevas técnicas experimentales que permiten la obtención de datos mucho más precisos que los que hasta ese momento se tenían. Como resultado de todo ello se produce una total desacreditación de las teorías clásicas en lo que a fenómenos críticos se refiere.

1965–1971 La reconciliación de Onsager con Van der Waals. Uhlenbeck propuso reconciliar los resultados de Onsager con la teoría de Van der Waals. De este período cabe destacar la *hipótesis de universalidad* (Kadanoff 1971), aunque todavía sin un modelo teórico que la justifique.

1971–1977 El grupo de Renormalización. La respetabilidad. El vacío teórico existente se llena en el cuarto periodo con la aparición de un nuevo formalismo matemático, que permite un mayor entendimiento de los procesos críticos y lleva la “ respetabilidad ” a este campo. Podemos decir que se inicia en 1971 cuando Kenneth Wilson propone la aplicación del *grupo de renormalización*, empleado en la teoría de campos, para explicar el comportamiento de los sistemas cerca del punto crítico.

1977–... La era de las nuevas criticalidades. Al final de los años setenta aparecen en el campo de la materia condensada toda una serie de fenómenos dinámicos que empiezan a tratarse mediante las técnicas genéricas del Grupo de Renormalización. Sin embargo no es hasta un poco antes de la década de los noventa cuando se produce la verdadera explosión en el uso de estos conceptos y técnicas a un sinfín de sistemas (físicos, biológicos, financieros, etc.) que presentaban algún tipo de comportamiento crítico que se expresaba en forma de scaling.

1.2. El período clásico: 1869-1944

1.2.1. El punto crítico líquido-gas

La relación entre gases y líquidos fue estudiada con detalle a principios del siglo XIX. Pronto se observó que a una determinada temperatura, llamada temperatura crítica, la fase líquida dejaba de existir.

Precisos experimentos con CO_2 llevaron a Thomas Andrews, en 1869, a introducir un nuevo concepto de simetría entre las fases líquida y gaseosa. Ambas fases se unían en el punto crítico en una única fase gaseosa. Este hecho ponía de manifiesto la existencia de una continuidad entre las fases líquida y gaseosa; es decir, se podía pasar de una a otra sin necesidad de cruzar la curva de coexistencia.

Todo esto no se explica con la ecuación de los gases ideales ($p(v) = RT/v$) ya que es una ecuación que no tiene ningún tipo de singularidad y, por ello, no puede explicar la existencia de un punto crítico. Era necesaria una nueva ecuación de estado.

Cuatro años después Van der Waals empleó las nuevas ideas desarrolladas en la teoría cinética de los gases para dar una explicación plausible de los datos experimentales obtenidos por Andrews. Van der Waals asumió que el gas estaba constituido por moléculas esféricas que experimentaban una atracción mutua de largo alcance. Esta fuerza atractiva daba lugar a la aparición de una *presión interna* creciente con la densidad que él estimó debía valer a/v^2 y que se sumaba a la presión p para dar $p' = p + p_{int}$. Además la consideración de moléculas esféricas de tamaño finito llevaba a una reducción del volumen disponible, que pasaba de ser v a ser $v' = (v - b)$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones Van der Waals propuso la siguiente ecuación de estado para los gases:

$$p' = \frac{RT}{v'} \quad \rightarrow \quad p + a/v^2 = RT/(v - b). \quad (1.1)$$

Dicha ecuación no es más que una extensión de la ecuación de los gases ideales ($p \cdot v = RT$) para el caso en que haya una interacción atractiva.

El modelo propuesto por Van der Waals depende de tres parámetros (R, a y b) y es un modelo que posee un punto crítico, que puede obtenerse al imponer las siguientes condiciones a la ecuación de estado:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0. \quad (1.2)$$

Vemos, por lo tanto, que en este caso el punto crítico no es más que un punto de inflexión de la ecuación de estado $p = p(v, T)$. Con las dos expresiones anteriores y la ecuación de estado (1.1) tenemos un sistema de tres ecuaciones que permite eliminar los tres parámetros del modelo definiendo unas nuevas variables termodinámicas,

$$\pi = \frac{p}{p_c} \quad ; \quad \omega = \frac{v}{v_c} \quad ; \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (1.3)$$

donde p_c, T_c, v_c son la presión, temperatura y volumen en el punto crítico; es decir, las coordenadas del punto crítico. En función de estas coordenadas la ecuación de estado toma la forma

$$\pi = f(\omega, \tau) \quad \rightarrow \quad \left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \left(\omega - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}\tau, \quad (1.4)$$

donde ésta es una expresión *universal*, independiente del gas que se considera, ya que no tiene parámetros libres. No hay información sobre ningún caso particular sino que la expresión es la misma $\forall a, b$.

1.2.2. Punto de Curie de un ferromagnético.

El hecho de que los materiales magnéticos pierden sus propiedades magnéticas a altas temperaturas era ya conocido desde muy antiguo. Incluso se empleaba la denominación de *temperatura crítica* para referirse a la temperatura en la cual el magnetismo desaparece. Pero el verdadero avance no llegó

hasta 1895 cuando Curie publicó sus resultados sobre los materiales ferromagnéticos, encontrando que la susceptibilidad magnética depende de la temperatura en la forma,

$$\chi = C/T, \quad (1.5)$$

donde C es la llamada *constante de Curie*. Este resultado fue explicado por Langevin, empleando las técnicas de la mecánica estadística, y obtuvo la ecuación de estado (relación entre la magnetización y el campo magnético) para un sistema en el que cada molécula posee momento magnético μ :

$$M = M_0 L(\mu H/k T), \quad (1.6)$$

donde $L(x) = \coth(x) - (1/x)$ es la función de Langevin y M_0 es la magnetización de saturación.

Curie también propuso la existencia de una analogía en el comportamiento de los materiales ferromagnéticos y de los fluidos. Tomando la presión como el análogo del campo magnético y la densidad como el análogo de la magnetización, Curie puso de manifiesto la similitud que existía entre las isothermas (p, ρ) y las (H, M) .

De esta forma, el estado paramagnético se corresponde con la fase gaseosa de un fluido y el estado ferromagnético con la fase líquida. Curie llegó a nombrar la posibilidad de que, tal y como sucedía con los fluidos, existiera un punto crítico para los materiales ferromagnéticos.

Fue esta analogía la que llevó a Pierre Weiss en 1907 a postular su *campo molecular*; basándose en el supuesto de que la interacción entre moléculas podía sustituirse por un campo uniforme (*campo interno*) proporcional a la magnetización en esa misma dirección, λM . Para obtener la ecuación de estado de un ferromagnético Weiss simplemente introdujo este campo interno en el argumento de la función de Langevin, basándose en las ideas de Van der Waals. El resultado es la ecuación transcendental,

$$M = M_0 L \left[\frac{\mu(H + H_{int})}{k_B T} \right] \quad (H_{int} = \lambda M). \quad (1.7)$$

Esta ecuación de estado presenta un punto crítico análogo al que aparecía para sistemas fluidos. Puede comprobarse que existe una temperatura T_c , llamada temperatura de Curie, por debajo de la cual existe una magnetización espontánea no nula (estado ferromagnético) mientras que por encima de esa temperatura la magnetización es nula (estado paramagnético). En este último caso la relación entre la susceptibilidad magnética y la temperatura propuesta por Curie debe modificarse en la forma,

$$\chi = C/(T - T_c), \quad (1.8)$$

5 y recibe el nombre de ley de Curie-Weiss. La ecuación (1.7) también admite una *Ley de Estados Correspondientes*, que nos viene a indicar la universalidad de fenómenos en cualquier material ferromagnético. Se llega a ella definiendo tres parámetros: M_0 , μ/k_B , λ/k_B .

1.2.3. El fenómeno de la opalescencia crítica

Es un fenómeno que descubrió Andrews y que llamó la atención de una serie de investigadores de principios de siglo XX. Consiste en que en una región de temperaturas cercana a la T_c , un líquido inicialmente transparente se vuelve opaco, e inicialmente la opacidad va acompañada de cambios radicales en el color del líquido. Eso es porque cerca del punto crítico se produce un drástico incremento del *scattering* de la luz.

A partir de cálculos en la Mecánica Estadística de equilibrio sabemos que las fluctuaciones en la densidad de un gas de partículas se expresan como

$$\langle \Delta \rho^2 \rangle = (\rho^2 k T / v) K_T, \quad (1.9)$$

donde K_T es la *compresibilidad isotérmica*,

$$K_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (1.10)$$

Vemos que un aumento de las fluctuaciones de la densidad está relacionado con un aumento de la compresibilidad. Dado que la ecuación de Van der Waals (1.1) proporcionaba un valor infinito para K_T en el punto crítico esto parecía explicar satisfactoriamente el fenómeno de la opalescencia crítica. Pero, ¿cómo se explican propiedades termodinámicas globales como la opalescencia crítica a partir de propiedades locales como las fluctuaciones de densidad?

Fueron Ornstein y Zernike (1914, 1916) quienes pusieron de manifiesto una inconsistencia del tratamiento que provenía de suponer que las fluctuaciones de densidad que tenían lugar en un elemento de volumen eran independientes de las que se producían en el resto de elementos de volumen. Propusieron considerar la existencia de una correlación entre los diferentes elementos de volumen que crecía de forma indefinida a medida que la temperatura se acercaba a su valor crítico (T_c).

Para tratar esta correlación consideraron la densidad local $n(\mathbf{r})$, cuyo promedio espacial verifica $\langle n(\mathbf{r}) \rangle = N/V = n$, siendo n la densidad media constante. De forma similar definimos el promedio $\langle n(\mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_2) \rangle$. Ornstein y Zernike introdujeron la función de correlación,

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle n(\mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_2) \rangle - n^2, \quad (1.11)$$

que se comporta como,

$$g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \longrightarrow 0 \text{ cuando } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

La función de correlación y K_T están relacionadas de la forma,

$$\frac{K_T}{K_T^o} = n^{-1} \int d\mathbf{r} g(\mathbf{r}), \quad (1.13)$$

donde K_T^o es la compresibilidad isotérmica de un gas ideal. Aquí podemos ver que una compresibilidad isotérmica divergente cerca de la temperatura crítica se corresponde matemáticamente con un incremento en el rango de la función de correlación $g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Suficientemente cerca del valor crítico la *longitud de correlación* toma valores del orden de la longitud de onda de la luz incidente y las fluctuaciones en la densidad desvían de forma pronunciada la luz. La idea física fundamental es que interacciones de carácter molecular, representadas por el potencial de interacción a parejas (que es de corto alcance), influyen directamente en la correlación entre densidades, representada por la función $g(r)$, que es de largo alcance a medida que nos acercamos a la temperatura crítica.

Los cálculos de Ornstein-Zernike sugerían que las correlaciones decaían, para valores grandes de r , de forma asintótica,

$$g(r) \sim \frac{\exp(-\kappa_1 \cdot r)}{r}, \quad (1.14)$$

donde la variable $\kappa_1 \sim (T - T_c)^{1/2}$ se obtiene de la ecuación de Van der Waals (1.1) y está relacionada con la inversa de la *longitud de correlación*, ξ , de manera que $(T - T_c)^{1/2} \sim \xi^{-1}$ y si $T \rightarrow T_c$ entonces $\xi \rightarrow \infty$, lo que nos permite concluir que cerca del punto crítico la correlación espacial es de largo alcance y que la función de correlación se comporta, en este límite, como una ley de potencias

$$g(r) \sim \frac{1}{r}. \quad (1.15)$$

Esto explica que la compresibilidad isotérmica en el punto crítico también diverja.

1.2.4. Comportamiento crítico de las mezclas binarias

En los primeros años del Siglo XX el desarrollo de la difracción de Rayos-X como técnica de investigación de las estructuras cristalinas permitió observar que ciertos compuestos poseían una estructura regular ordenada. En algunos sistemas tenía lugar un incremento del desorden cuando se aumentaba su temperatura de una manera controlada -evitando que se produzca una transición de fase- y éste iba acompañado de un comportamiento anómalo del calor específico. La descripción matemática de este proceso la obtuvieron en 1934 Bragg y Williams. Introdujeron un nuevo parámetro S (parámetro de orden) para caracterizar el *grado de orden* existente en el sistema, y emplearon el principio de Boltzmann para calcular su comportamiento en función de la temperatura. Obtuvieron un

resultado análogo al de Weiss al estudiar los sistemas ferromagnéticos, con S tendiendo rápidamente a cero al acercarse a la temperatura crítica y con valor nulo para temperaturas mayores a la crítica,

$$S = \begin{cases} S = 0 & \text{si } T > T_c \\ S \neq 0 & \text{si } T < T_c. \end{cases}, \quad (1.16)$$

Para una mezcla binaria con igual concentración de sus constituyentes obtuvieron la siguiente expresión para el parámetro de orden S :

$$S = \tanh\left(\frac{S \cdot T_c}{T}\right), \quad (1.17)$$

que es idéntica a la ecuación (1.7) si tomamos $H = 0$ y sustituimos la función de Langevin, $L(x)$, por $\tanh(x)$. Debido a la analogía que podía establecerse con el caso ferromagnético se llamó a la temperatura T_c la *temperatura de Curie* de la mezcla; S recibió el nombre de *orden de largo alcance* para diferenciarlo de otro parámetro que había introducido Bethe para caracterizar el *orden de corto alcance* que persistía para temperaturas superiores a la crítica. En dicho artículo Bragg y Williams hacen especial hincapié en la diferencia significativa que existe entre el *orden de largo alcance* y las *fuerzas de largo alcance*, y constatan la posibilidad de que fuerzas de corto alcance (de tipo atómico) den lugar a orden de largo alcance; una conclusión análoga a la obtenida en su día por Ornstein y Zernike para los fluidos.

1.2.5. Universalidad de las transiciones de segundo orden: La teoría de Landau

Fue L.D. Landau (1937) el primero en intentar obtener una descripción unificada para el comportamiento de todos los sistemas cerca del punto crítico. Landau generalizó las ideas introducidas en la teoría de las mezclas binarias a todos los sistemas que manifestaban una transición continua del tipo (1.16). Sugirió que para cada sistema con una transición de este tipo debía poder identificarse un *parámetro de orden* (η), análogo al orden de largo alcance para las mezclas, que debía anularse para temperaturas superiores a la crítica y tomar valor no nulo para temperaturas inferiores:

$$\eta = \begin{cases} \eta = 0 & \text{si } T > T_c \\ \eta \neq 0 & \text{si } T < T_c, \end{cases}, \quad (1.18)$$

donde ρ , M y S son casos particulares de η para diferentes sistemas.

Landau puso especial énfasis en el papel que jugaban las simetrías en las transiciones. Sugirió que los rasgos especiales de comportamiento que presentaban los sistemas cerca del punto crítico podían determinarse si se desarrollaba la energía libre de Gibbs en serie de potencias del parámetro de orden, η . Todos los sistemas físicos se describían por el mismo potencial $\phi(p, T, \eta)$, sobre el que Landau argumentó que, por razones de simetría, $\phi(p, T, \eta) = \phi(p, T, -\eta)$ y que la forma de dicha expansión debía ser,

$$\phi(p, T, \eta) = \phi_0(p, T) + A(p, T)\eta^2 + B(p, T)\eta^4 + \dots, \quad (1.19)$$

donde la temperatura de Curie se obtenía a partir de

$$A(p, T_C) = 0. \quad (1.20)$$

La condición $B(p, T) > 0$ nos asegura que el sistema será estable si cortamos el desarrollo en η^4 . Las soluciones de equilibrio se corresponden con los mínimos de la energía libre,

$$\eta = 0, \quad (1.21)$$

$$\eta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{-A(p, T)}{2 \cdot B(p, T)}}. \quad (1.22)$$

Distinguimos dos casos:

1. Si $A(p, T) > 0$, la solución correspondiente al mínimo de ϕ es $\eta = 0$ y se corresponde con la *fase de máxima simetría*.
2. Si $A(p, T) < 0$, el mínimo viene dado por η_{\pm} , y se corresponde con la *fase de mínima simetría*.

El caso $A(p, T) = 0$ es el crítico, en el que hay la transición de segundo orden. Vemos pues que este tipo de transición es continua.

Si tomamos $A(p, T) = a \cdot (T - T_c)$ podemos observar que todas las ecuaciones de estado que hemos visto hasta el momento verifican cerca del punto crítico el desarrollo analítico (1.19), lo que nos indica que todos los sistemas clásicos pertenecen a una misma clase de universalidad. La teoría de Landau propone la existencia de un patrón de comportamiento similar para todos los sistemas en las cercanías del punto crítico, pero no aporta explicación alguna de porqué se da tal patrón. También vemos que $A(p, T)$ será positiva o negativa dependiendo de si la temperatura es mayor o menor que la temperatura crítica.

Si nos centramos ahora en los exponentes que aparecen en las relaciones que se establecen entre algunas cantidades termodinámicas y la temperatura (o entre diferentes cantidades termodinámicas) en las cercanías del punto crítico, vemos que la teoría de Landau nos proporciona el mismo valor para los exponentes críticos de los diferentes sistemas, lo que nos vuelve a indicar la existencia de una cierta universalidad para los sistemas clásicos ya que los resultados no dependen de la naturaleza de los mismos.

1.3. La revolución de Onsager: 1944-1965

En 1925 Lenz propuso a su estudiante, Ising, un sencillo modelo ferromagnético. Se trataba de un patrón reticular en cuyos nudos se situaba un spin que podía orientarse de forma paralela o antiparalela a un campo magnético externo. Ising consiguió resolver el problema en una dimensión ($H_{ij} = -Js_i \cdot s_j$; $s = \pm 1, J > 0$) y observó que no había ningún valor no nulo de la temperatura para el cual el sistema presentase una magnetización espontánea; o lo que es lo mismo, el sistema no presentaba ningún punto crítico salvo el trivial ($T_c = 0$, donde, por lógica, todos los spines son paralelos). Por este motivo, decayó el interés por el modelo.

En 1928 Heisenberg dotó a la variable espinorial de un carácter vectorial; de manera que la interacción entre spines se reducía a una interacción entre vectores ($H_{ij} = -J\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$).

En 1936 Peierls, empleando argumentos basados en la simetría existente entre la red real y su dual, demostró que el modelo de Ising en dos dimensiones debía tener una magnetización espontánea a temperatura finita no nula.

En 1941 Kramers y Wannier encontraron una expresión analítica de T_c para el modelo de Ising en dos dimensiones.

En 1944 Onsager publicó la solución exacta de la función de partición del modelo de Ising en dos dimensiones para una red cuadrada simple a campo magnético nulo, y obteniendo la temperatura crítica encontrada por Kramers y Wannier. Los resultados que obtuvo entraban en contradicción con la teoría clásica. Por un lado, el calor específico no presentaba una discontinuidad, como predecían los modelos clásicos, sino más bien un infinito de tipo logarítmico. Por otro lado, y lo que era más importante, la función de partición no era analítica cerca de la T_c por lo que el desarrollo analítico introducido por Landau quedaba invalidado.

En 1949 Onsager consigue calcular la magnetización espontánea (que más tarde sería calculada de forma independiente por C. N. Yang (1952)) y vio que era muy distinta a la proporcionada por la teoría de Weiss.

Los resultados obtenidos por Onsager no pudieron ser contrastados experimentalmente debido a que su modelo era un modelo válido únicamente para un sistema bidimensional. No obstante, se fue obteniendo, gradualmente, información experimental fiable de las propiedades críticas de diferentes modelos teóricos. A medida que la cantidad de datos experimentales de los que se disponía iba en aumento se empezaron a obtener ciertos patrones de regularidad y se llegó a las siguientes conclusiones en cuanto al comportamiento crítico de los sistemas:

- Los resultados dependen de la dimensión del espacio euclídeo en el que estamos y de las simetrías de la variable microscópica.
- Los resultados dependen muy poco de la estructura del retículo.
- Cerca del punto crítico el campo medio es una mala aproximación. Eso es debido a que la ecuación de estado es no analítica cerca del punto crítico y las ecuaciones de campo medio son analíticas por definición.
- Los exponentes críticos variaban sus valores del modelo de Ising al de Heisenberg pero presentaban, para un modelo dado, cierta independencia del valor del spin.

Kac y Uhlenbeck introdujeron un nuevo método de cálculo para las fuerzas de largo alcance que permitió reencontrar los resultados de la teoría clásica, una ecuación de estado del tipo Van der Waals (1.1) para los fluidos, la ecuación de estado de Weiss (1.7) para los ferromagnetos y la relación de Bragg-Williams (1.17) para mezclas de orden superior. Se vió, de este modo, que la teoría clásica era una teoría válida para fuerzas de largo alcance, pero que estaba en desacuerdo con los experimentos porque la mayor parte de las fuerzas intermoleculares que encontramos en la naturaleza son de corto alcance. La conclusión es que las teorías de campo medio son solo aproximaciones de los sistemas físicos que, por definición, son no clásicos.

En 1952 Berlin y Kac consideraron y resolvieron de forma exacta un modelo de Ising en el cual los spines podían tomar cualquier valor siempre y cuando la suma cuadrática de todos ellos fuese igual a N (*el modelo esférico*).

1.4. La reconciliación de Onsager con Van der Waals : 1965–1971

En 1965, G. E. Uhlenbeck propuso la posibilidad de que existiese una explicación de tipo general para el comportamiento universal pero no clásico que presentaban los sistemas cerca del punto crítico y que, de ser así, seguramente dicha explicación se sustentaría en que las fuerzas no son de largo alcance. Así mismo, también indicó la posibilidad de que lejos de los puntos críticos las teorías clásicas constituyesen una buena aproximación que dejaba de ser válida en regiones cercanas al punto crítico pues en ellas debían tenerse en cuenta consideraciones del estilo de las introducidas por Onsager. A esta posibilidad la bautizó con el nombre de *la reconciliación de Onsager con Van der Waals*.

El primer requisito para llevar a cabo esta reconciliación era obtener una descripción coherente de la universalidad no clásica. Tal descripción llegó pocos meses después de la propuesta de Uhlenbeck bajo la forma de una ecuación de estado no clásica y de la mano de diferentes grupos: Widom (1965), Domb y Hunter (1965) y Patashinskii y Pokrovskii (1966). Resultados que fueron reunidos en una sola expresión por Griffiths (1967) con su ecuación de estado para un ferromagnético cerca del punto crítico:

$$H = M^\delta h(t M^{-1/\beta}) \quad \text{con } t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.23)$$

Ésta es la llamada hipótesis de escala, donde β y δ son dos parámetros que determinan todos los exponentes y $h(x)$ es una función analítica que recibe el nombre de *función de scaling*. La teoría clásica se corresponde con $\delta = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, y $h(x)$ lineal. Los resultados no clásicos pueden ajustarse a los datos experimentales si se emplean otros valores para los exponentes β , δ y una función diferente para $h(x)$. Hay que destacar que para los fluidos existe una expresión muy parecida que puede obtenerse a partir de (1.23) sustituyendo H por $p - p_c$ o M por $\rho - \rho_c$.

La ecuación (1.23) presenta características muy interesantes:

1. Los exponentes críticos para cualquier sistema pueden determinarse a partir de sólo dos exponentes, δ y β . Los demás exponentes críticos se deducen a partir de estos dos.
2. La expresión anterior puede ponerse como una relación de scaling:

$$H M^{-\delta} = h(t M^{-1/\beta}), \quad (1.24)$$

3. La ecuación de estado es no analítica (exponentes críticos no naturales y función $h(x)$ no analítica cerca del punto crítico) tal y como había avanzado Onsager.

Si representamos $HM^{-\delta}$ vs. $tM^{-1/\beta}$, obtendremos la curva de scaling, $h(x)$. O sea que una ecuación de estado de tres variables se reduce a una de dos cerca del punto crítico. Estas dos predicciones fueron sometidas a diferentes tests experimentales para un gran número de sistemas, fluidos y magnéticos, obteniéndose resultados que las ratificaban. Debemos subrayar que la ecuación (1.23) no nos da ningún tipo de información acerca de los posibles valores que pueden tomar los parámetros δ , β y $h(x)$.

En la sección anterior hemos mencionado que en los datos obtenidos empíricamente se observaba una cierta regularidad que carecía de explicación. Fue Kadanoff en 1970 quien a través de su método de decimación proporcionó una explicación del scaling.

Esta universalidad no-clásica es mucho más sofisticada que la que había previsto Uhlenbeck. Existen diferentes clases de universalidad en la que cada una solo depende de

1. Dimensión del espacio euclídeo físico (d).
2. Dimensión de la variable microscópica (n).
3. Rango de las interacciones intermoleculares (σ), para la mayoría de sistemas y situaciones críticas es de corto alcance .

Una vez se han especificado los valores de estos tres parámetros, los exponentes β , δ y la función $h(x)$ quedan totalmente determinados. Este punto se desarrollará más adelante. Dentro de una misma clase el comportamiento de los sistemas en un entorno del punto crítico es universal, donde las teorías clásicas o de campo medio resultan ser válidas para $d \geq 4$.

1.5. El grupo de Renormalización. La respectabilidad: 1971–1977

La hipótesis de scaling satisfacía las necesidades experimentales, pero se carecía de un modelo teórico riguroso desde el punto de vista matemático. A estos efectos, la introducción y aplicación por parte de K. G. Wilson del grupo de renormalización a los fenómenos críticos consiguió dotar de una base matemática a las ideas de Kadanoff y llevar la “respectabilidad” al campo de los fenómenos críticos. El grupo de renormalización había sido desarrollado a principios de los años veinte (Stueckelberg y Peterman 1953, Gell-Mann y Low 1954), en relación a la teoría de campos. Wilson se dió cuenta de que dicha teoría era capaz de explicar la universalidad y que la proveía de un marco de trabajo donde llevar a cabo los cálculos del comportamiento crítico. Mediante su implementación consiguió transformar el procedimiento de bloques introducido por Kadanoff en una potente y precisa herramienta de cálculo.

El grupo de renormalización consiste en una transformación del hamiltoniano original, \mathbf{H} , con N grados de libertad en uno de nuevo, \mathbf{H}'

$$\mathbf{H}' = \mathbf{R}[\mathbf{H}], \quad (1.25)$$

que tiene un número menor de grados de libertad, $N' < N$. La transformación se escoge de manera que la función de partición permanezca invariante, para tener la misma información física,

$$Z_{N'}(\mathbf{H}') = Z_N(\mathbf{H}). \quad (1.26)$$

Existe un gran número de operadores, \mathbf{R} , que satisfacen estas condiciones. El método de *formación de bloques* introducido por Kadanoff puede emplearse para eliminar las interacciones internas entre los spines de un mismo bloque; en el método de *decimación* la mitad de los spines pueden eliminarse mediante una resumación parcial. Estos procedimientos constituyen lo que se conoce como *renormalización en el espacio real*. De forma alternativa, las transformaciones pueden también llevarse a cabo en el espacio de Fourier mediante la integración de los momentos grandes, y se denomina *renormalización en espacio de momentos*.

Uno de los aspectos que cabe destacar de la transformación del hamiltoniano es que puede iterarse,

$$\mathbf{H}' = \mathbf{R}[\mathbf{H}], \quad \mathbf{H}'' = \mathbf{R}[\mathbf{H}'], \quad \dots \quad (1.27)$$

Las propiedades de universalidad se obtienen del comportamiento límite de este proceso iterativo. La expresión (1.27) no es más que la generalización de la expresión iterativa elemental: $x_{n+1} = f(x_n)$, a un espacio multidimensional,

$$\mathbf{K}_{n+1} = f(\mathbf{K}_n), \quad (1.28)$$

correspondiente al número de parámetros que aparecen en el hamiltoniano, donde \mathbf{K} es un vector que incluye todas las constantes de acoplamiento que aparecen en el modelo. Aunque sea un proceso iterativo, la mayor parte de sus propiedades se mantienen invariantes, entre ellas la posibilidad de convergencia a un punto fijo, \mathbf{K}^* , tal que,

$$\mathbf{R}(\mathbf{K}^*) = \mathbf{K}^*. \quad (1.29)$$

Cada punto fijo se corresponde con una clase de universalidad, donde hamiltonianos con diferentes parámetros pueden converger en un mismo punto fijo y al que tiendan los puntos críticos de cada miembro de la misma clase de universalidad.

El comportamiento crítico de un sistema puede obtenerse de las ecuaciones (1.28) y (1.29); de manera que si tomamos un desarrollo lineal alrededor de este punto podemos derivar un operador lineal cuyos valores propios están relacionados con los exponentes críticos.

Las ideas de Kadanoff llevaron al grupo de renormalización en el *espacio real*, si bien no se tardó en aplicar técnicas perturbativas a la renormalización en el *espacio de momentos*, como se había hecho en la teoría cuántica de campos. Para ello, Wilson [WK74] retomó las ideas de Landau en su formulación microscópica, tomando como punto de partida el funcional de energía libre de Ginzburg-Landau, convertido en hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{[\nabla S(x)]^2}{2} + \frac{r}{2} S^2(x) + u S^4(x) - B S(x) \right\}, \quad (1.30)$$

donde $S(x)$ es una densidad local de la variable microscópica del problema y B el campo externo. Los parámetros r , u y B se transforman al aplicar los procedimientos del Grupo de Renormalización.

Otro resultado relevante de Wilson fue demostrar que los términos de orden superior en $S(x)$, como $S(x)^6$, son irrelevantes en el sentido de que no contribuyen de manera significativa al comportamiento crítico del sistema (sus coeficientes son *parámetros irrelevantes*).

Los parámetros que escogieron Wilson y Fisher para expandir los exponentes críticos y las funciones de *scaling* fueron la dimensión del espacio d y el número de componentes n de la variable $S(x)$, en la forma $\epsilon = 4 - d$ y $1/n$ (llamados parámetros de expansión). Si tomamos $\epsilon = 0$ reencontramos los resultados clásicos. Hay que destacar aquí, que es precisamente en la formulación de Wilson donde se manifiesta la relevancia de d y n para describir el punto crítico.

La aplicación del grupo de renormalización a los fenómenos críticos no se limitó únicamente a triunfar donde habían fallado las anteriores teorías, sino que abrió toda una serie de nuevas vías de investigación (Grupo de Renormalización Dinámico), que aparecen por primera vez en el artículo de Foster-Nelson-Stephen [FNS77] de 1977.

1.6. La era de las nuevas criticalidades: 1977-.....

Es la era en la que hay indicios de la existencia de un gran número de sistemas con un comportamiento crítico. A continuación vamos a detallar algunas de las teorías que se idearon, basándose en el grupo de renormalización, para explicar el comportamiento de algunos de estos sistemas.

- El modelo del camino autoevitante, *Self avoiding walk (SAW)*, se introdujo para estudiar la forma, el tamaño y el comportamiento de un polímero real —con tamaño finito— diluido, en el que sus elementos no se pueden cruzar por repulsión mutua. Teóricamente se ha demostrado que este modelo se corresponde con un modelo de Ising para un ferromagneto con dimensión del spin n tal que pueda tomar valor nulo.

- Otro fenómeno que puede explicarse por medio de la teoría de los fenómenos críticos es el de la *percolación*. Flory y Stockmayer la emplearon para explicar cómo un conjunto de moléculas podía llegar a formar macromoléculas mediante la formación de enlaces químicos entre ellas (proceso de polimerización) y como estas macromoléculas, a su vez, podían dar lugar a grandes redes moleculares que abarcaban todo el sistema (“gelation process”). La verdadera avalancha de artículos y modelos relacionados con la percolación no tendrá lugar hasta finales de los años ochenta y principios de los noventa. La percolación permite explicar fenómenos tan diversos como la propagación del fuego o enfermedades en un bosque o en un cultivo, así como la distribución de aceite, petróleo o gas en el interior de recipientes o en los poros de las rocas, o la difusión en un medio desordenado.
- Otro modelo que aparece en esta etapa es la *agregación con difusión limitada (o Diffusion-limited Aggregation, DLA)*, introducido en 1981 por T. A. Witten and L. M. Sander [WS81]. Dicho modelo permite generar, mediante un sencillo algoritmo, estados complejos de agregación de partículas idénticas en un “cluster” mediante el movimiento browniano de las mismas¹. Cabe destacar que estos “clusters” son diferentes de los que aparecen en el proceso de percolación y que algunos de sus aspectos más importantes pueden estudiarse aplicando modelos de escala del crecimiento fractal. El modelo DLA permite explicar una gran cantidad de fenómenos naturales, tales como la electrodeposición, la ruptura dieléctrica, el crecimiento de superficies, etc... A pesar de ello, el modelo DLA sigue presentando hoy en día una serie de dificultades teóricas, como la de obtener un modelo de escala convincente para su estructura o la de elaborar un marco de trabajo sistemático para las clases de no-equilibrio y crecimiento no-local a las que pertenece el modelo DLA.
- El fenómeno conocido con el nombre de *Criticalidad autoorganizada (Self Organized Critically, SOC)* fue introducido en 1988 por Bak, Tang y Wiesenfeld [BTW88]; que dieron con la existencia de ciertos sistemas dinámicos que evolucionaban de forma natural hacia un estado crítico a través de un proceso de autoorganización. Además observaron que el estado crítico en dichos sistemas se caracterizaba porque no existían ninguna longitud ni escala de tiempo intrínsecas. Por analogía con los sistemas críticos tradicionales argumentaron que cerca del punto crítico existía un comportamiento universal y que los sistemas podían caracterizarse por medio de un conjunto de exponentes críticos. Estos autores sugirieron que un ejemplo particular de sistema SOC podía ser un montón de arena (“sandpile model”) al que se le iba añadiendo de forma aleatoria granos de arena hasta que la arena que se hallaba en un estado inestable deslizaba. De manera que cuando se alcanzaba esta situación la pendiente del montón de arena había llegado a su valor crítico y cuyo comportamiento podía hacerse mediante exponentes críticos. Este modelo de autómatas celulares constituye un paradigma para explicar gran número de fenómenos naturales: el ruido $1/f$, las estructuras fractales, etc. En los últimos años los modelos SOC se han aplicado satisfactoriamente al estudio de los terremotos —la distribución de las magnitudes que se emplean en el estudio de los terremotos es una ley de potencias (Ley de Gutenberg-Richter)—, las avalanchas, la fractura de materiales, las descargas eléctricas, la inestabilidad de los conjuntos económicos y la extinción de las especies, etc...
- El modelo llamado **KPZ**, propuesto por Kardar, Parisi y Zhang en 1986, explica el crecimiento rugoso de una superficie [KPZ86]. La ecuación que aparece en dicho modelo, y que recibe el nombre de ecuación KPZ, es una ecuación diferencial estocástica no lineal que describe el crecimiento de un frente o una superficie. La no linealidad es debida a que dicha ecuación contempla la posibilidad de que exista un crecimiento lateral en la interfaz del material. Los métodos tradicionales de estudio no funcionaron en este modelo, y no fue hasta que se desarrolló el grupo de renormalización dinámico cuando pudo obtenerse la explicación a su comportamiento crítico. Además de explicar el crecimiento de una superficie el modelo KPZ aparece también en un gran

¹El modelo original de Witten y Sander consistía en partículas, representadas por los nudos de un retículo, que eran añadidas de forma simultánea a un “cluster” en crecimiento mediante caminos aleatorios (“random walks”) que empezaban fuera de la región ocupada por el “cluster”

número de fenómenos naturales: el transporte disipativo, la deriva de un fluido dinámico o la evolución del frente en un incendio o en un proceso de inundación.

- También podríamos señalar aquí el fenómeno de scaling y los exponentes dinámicos que aparecen en los procesos de crecimiento de dominios que se observan durante la dinámica de transiciones de fase de primer orden, a pesar de que no estamos cerca de ningún punto crítico sino bastante lejos [GSMS63].

Es en este tipo de nuevos problemas donde hay un cierto interés por la aportación del Grupo de Renormalización.

Parte I

Grupo de renormalización estático

Capítulo 2

El grupo de renormalización estático

2.1. Introducción

El pasado reciente en el campo de los fenómenos críticos ha estado caracterizado por importantes avances conceptuales, tres de los cuáles son: scaling, renormalización y universalidad. En este segundo capítulo vamos a desarrollar dichos conceptos que representan la base de la teoría moderna de los fenómenos críticos.

El concepto de *scaling* juega un papel central en el estudio de los sistemas complejos, los cuáles actualmente tienen un gran interés para la comunidad científica. Se trate de problemas relacionados con estructuras a gran escala del universo, o del comportamiento de las interacciones entre los constituyentes fundamentales de la materia a escala microscópica, todos ellos presentan la característica común de presentar un gran número de grados de libertad que interactúan entre ellos de forma no-lineal. Con el objetivo de entender este complicado comportamiento es posible aislar unas pocas variables relevantes, las cuáles caracterizan el comportamiento del sistema en una cierta escala de longitud o tiempo, y postular las relaciones de scaling que se cumplen entre ellas. Mediante este procedimiento es posible unificar diferentes conjuntos de resultados experimentales de diversos sistemas. Este fenómeno recibe el nombre de *universalidad*.

La existencia de tal comportamiento de scaling puede ser explicado mediante un conjunto de ideas teóricas agrupado bajo el término de *renormalización*. Éste describe cómo deben ser redefinidos los parámetros que definen al sistema, a través de transformaciones en las variables del sistema, de forma que no se modifiquen las propiedades medibles del sistema en las escalas de longitud o tiempo de interés. Es decir, que la física sea invariante bajo dicho tipo de transformaciones. Postular la existencia de puntos fijos en dichos flujos de renormalización es suficiente para explicar cualitativamente la aparición de las leyes de scaling. Desafortunadamente, para la mayoría de sistemas complejos, no ha sido establecido un procedimiento sistemático para obtener las transformaciones de renormalización adecuadas a partir de la dinámica microscópica subyacente.

Por suerte, hay una clase de problemas físicos para los cuáles los conceptos de scaling y de renormalización pueden ser derivados sistemáticamente: el comportamiento crítico de equilibrio.

Hemos visto diversos ejemplos de fenómenos críticos, como el caso de los sistemas ferromagnéticos. Estos problemas están caracterizados matemáticamente por el comportamiento singular de las funciones termodinámicas en el punto crítico. Uno de los problemas que la teoría de fenómenos críticos debe resolver es cómo surge el comportamiento no-analítico en la escala macroscópica a partir de leyes microscópicas regulares. También necesita explicación cómo las interacciones microscópicas de corto alcance pueden dar lugar a un orden de largo alcance, como en el caso de las transiciones gas-líquido. Otra dificultad que debe ser explicada es cómo se rompen las simetrías microscópicas en los estados macroscópicos, como en las transiciones paramagnéticas-ferromagnéticas. A continuación vamos a introducir mejor estos conceptos básicos.

Scaling Este concepto fue desarrollado por Widom, Domb, Fisher y Kadanoff. La hipótesis de scaling se divide en dos categorías de predicciones, ambas bien verificadas por resultados experimentales de diversos sistemas. Debemos diferenciar entre leyes y funciones de scaling. Las leyes de scaling son relaciones matemáticas entre los exponentes críticos del sistema. Por ejemplo, en un sistema ferromagnético se definen los siguientes comportamientos cerca del punto crítico,:

$$M(t, 0) \sim (-t)^\beta \quad C_H(t, 0) \sim t^{-\alpha} \quad \chi(t, 0) \sim |t|^{-\gamma}, \quad \text{con} \quad t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (2.1)$$

y resulta que se cumple la siguiente ley de scaling

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (2.2)$$

Por otro lado, las funciones de scaling son un colapso de los datos, de tal forma que la ecuación de estado es función de una sola variable cerca del punto crítico. Dicho de una manera gráfica, toda la superficie de puntos de equilibrio puede ser reducida a una línea cerca del punto crítico. Volviendo al ejemplo del sistema magnético, la ecuación de estado colapsa en la siguiente función

$$M = H^{1/\delta} f(|t|^{\beta\delta} H). \quad (2.3)$$

Las predicciones de la hipótesis de scaling están respaldadas por un amplio rango de trabajo experimental y por numerosos cálculos en modelos teóricos.

Universalidad El hecho de que los datos para diferentes estados de equilibrio colapsan en funciones de scaling corroboran la hipótesis de scaling, mientras que el hecho que esta función sea la misma para diversos sistemas (pese a estar caracterizados por hamiltonianos diferentes) es lo que se conoce como universalidad. Dos sistemas con los mismos exponentes críticos y las mismas funciones de scaling se dice que pertenecen a la misma clase de universalidad. Esta aparente universalidad del comportamiento crítico motiva la cuestión de cuáles son las características importantes de la interacción microscópica entre partículas para determinar los exponentes críticos y las funciones de scaling.

Renormalización Los métodos del grupo de renormalización fueron introducidos por Wilson, con el objetivo de implementar matemáticamente la hipótesis de scaling de Kadanoff. La renormalización se basa en la idea esencial, aportada por Wilson, que el punto crítico puede ser asociado a un punto fijo mediante una transformación adecuada del hamiltoniano del sistema. La descripción resultante es conocida como el grupo de renormalización y aporta una fundamentación para entender cuestiones como scaling y universalidad además de proveer de una herramienta de cálculo que permite obtener exponentes críticos y funciones de scaling.

2.2. Scaling

El scaling surge como una hipótesis para entender y clasificar los datos experimentales. Dicha hipótesis está implementada a partir de la energía libre de Gibbs, concretamente en la parte singular de la función, la cuál domina en la región cerca del punto crítico. Vamos a considerar de nuevo un sistema ferromagnético. Tenemos que

$$G(H, T) = G_{\text{singular}}(H, T) + G_{\text{no-singular}}(H, T). \quad (2.4)$$

La hipótesis de scaling asume que en un entorno del punto crítico, la energía libre (la parte singular) del sistema escala como

$$G(H, t) = \lambda G(\lambda^r H, \lambda^s t), \quad (2.5)$$

donde la temperatura reducida está definida como $t = (T - T_c)/T_c$. Vemos pues que $G(H, t)$ es una función homogénea generalizada (GHF). Además, tenemos que todas las transformaciones de Legendre de dicho potencial son también funciones homogéneas generalizadas, así como las derivadas de dicho potencial. Por tanto, las consecuencias de esta hipótesis son que todos los potenciales y magnitudes

termodinámicas son también funciones homogéneas generalizadas. Por descontado, esto sólo es válido cerca del punto crítico. Como acabamos de ver, una única hipótesis de scaling determina el scaling de todas las funciones termodinámicas.

2.2.1. Leyes de Scaling

A partir de la hipótesis de scaling pueden ser derivadas las leyes de scaling: las relaciones entre los exponentes críticos. Volviendo al ejemplo anterior, mostramos cómo se obtienen dichas leyes. Primero, consideremos el comportamiento de scaling de la magnetización:

$$M(H, t) = - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_t = - \lambda \left(\frac{\partial G(\lambda^r H, \lambda^s t)}{\partial \lambda^r H} \right)_t \left(\frac{\partial \lambda^r H}{\partial H} \right)_t = \lambda^{r+1} M(\lambda^r H, \lambda^s t). \quad (2.6)$$

Una vez que hemos obtenido el scaling para la magnetización, podemos comparar con el comportamiento experimental, $M(0, t) \sim |t|^\beta$, y con una elección particular del parámetro arbitrario, $\lambda = |t|^{-1/s}$, obtenemos inmediatamente la ley de scaling

$$M(0, t) = |t|^{\frac{-1-r}{s}} M(0, -1) \sim (-t)^{\frac{-1-r}{s}} \implies \beta = -\frac{r+1}{s}. \quad (2.7)$$

A continuación nos centramos en la susceptibilidad del sistema con tal de obtener una segunda ley de scaling. Esta magnitud termodinámica se define como

$$\chi(H, t) = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_t = \lambda^{2r+1} \chi(\lambda^r H, \lambda^s t), \quad (2.8)$$

donde la segunda igualdad se sigue directamente de la ley de scaling para la magnetización. De nuevo, si escogemos el parámetro de scaling como $|t|^{-1/s}$, obtenemos la relación

$$\chi(0, t) = |t|^{-(2r+1)/s} \chi(0, \pm 1). \quad (2.9)$$

Como es usual, este comportamiento se puede comparar con los resultados experimentales cerca del punto crítico

$$\chi(0, t) \sim \begin{cases} (-t)^{-\gamma'}, & \text{si } t < 0 \\ (t)^\gamma, & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

de forma que la hipótesis de scaling nos lleva a la igualdad $\gamma' = \gamma$, así como a la ley de scaling

$$\gamma = \frac{2r+1}{s}. \quad (2.11)$$

Este procedimiento puede repetirse para cualquier otra variable termodinámica, siempre que sean funciones homogéneas generalizadas, con tal de obtener otras leyes de scaling. Por ejemplo, a partir de la definición de calor específico

$$C_H(0, t) = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right)_H \longrightarrow C_H(H, t) = \lambda^{2s+1} C_H(\lambda^r H, \lambda^s t) \quad (2.12)$$

considerando nuevamente que $\lambda = |t|^{-1/s}$, tenemos que

$$C_H(0, t) \sim |t|^{-\frac{2s+1}{s}} C_H(0, \pm 1), \quad (2.13)$$

el comportamiento experimental observado es

$$C_H(0, t) \sim \begin{cases} (-t)^{-\alpha'}, & \text{si } t < 0 \\ (t)^\alpha, & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

comparando las dos expresiones obtenemos las correspondientes leyes de scaling,

$$\alpha = \alpha' \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{2s+1}{s}. \quad (2.15)$$

Finalmente, determinamos el exponente crítico del parámetro de orden, que viene definido definido por

$$M(H, 0) \sim |H|^{1/\delta}. \quad (2.16)$$

Gracias a la hipótesis de scaling la, magnetización puede escribirse como

$$M(H, t) = \lambda^{r+1} M(\lambda^r H, \lambda^s t), \quad \text{para } t = 0 \quad M(H, 0) = \lambda^{r+1} M(\lambda^r H, 0) \quad (2.17)$$

$$\text{si } \lambda^r H = 1 \quad \longrightarrow \quad M(H, 0) \sim |H|^{-(r+1)/r}, \quad (2.18)$$

derivándose directamente las leyes de scaling para este exponente crítico,

$$\delta = -r/(r+1). \quad (2.19)$$

Hasta aquí hemos logrado expresar cualquier exponente crítico en función de dos exponentes r y s , por lo que concluimos que solamente dos de ellos son independientes, pudiéndose encontrar relaciones entre ellos, es decir: las leyes de scaling. Dos de las más importantes pueden ser derivadas explícitamente a partir de las relaciones previas, después de un poco de álgebra, obteniendo el resultado

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad \longrightarrow \quad \text{igualdad de Rushbrooke} \quad (2.20)$$

$$\beta(\delta - 1) = \gamma \quad \longrightarrow \quad \text{igualdad de Griffiths} \quad (2.21)$$

Estas igualdades han sido verificadas experimentalmente dentro de la incertidumbre experimental. Hemos visto pues como la hipótesis de scaling nos lleva de forma natural a las leyes de scaling.

2.2.2. Funciones de Scaling

Como dijimos en la introducción, la hipótesis de scaling, así como las leyes de scaling, demuestran el colapso de la ecuación de estado del sistema dado en lo que es conocido como las funciones de scaling. Como ejemplo, vamos a considerar el comportamiento de scaling de la magnetización de un sistema ferromagnético:

$$M(H, t) = \lambda^{r+1} M(\lambda^r H, \lambda^s t). \quad (2.22)$$

Si escogemos el parámetro arbitrario de scaling como $\lambda = |t|^{-1/s}$ reescribimos la relación anterior como,

$$M(H, t) = |t|^{-(r+1)/s} M(|t|^{-r/s} H, -1) = |t|^\beta M(|t|^{-\beta\delta} H, -1). \quad (2.23)$$

Esto significa que cerca del punto crítico del sistema, la ecuación de estado $M = f(H, t)$, la cuál es una superficie, colapsa a

$$M = H^{1/\delta} f(tH^{-1/\beta\delta}), \quad (2.24)$$

esto es, la ecuación de una línea. Como tenía que ser, la función de scaling depende sólo de dos exponentes críticos (dado que sólo hay dos exponentes independientes). Efectivamente, vemos que el tratamiento es coherente. El problema con el que nos encontramos ahora es cómo obtener dichos exponentes y leyes a partir de una teoría fundamental. En este contexto, aparece el grupo de renormalización, el cuál es analizado en la siguiente sección.

La hipótesis de scaling puede aplicarse también a otros observables físicos. En la sección siguiente veremos como se aplica a la longitud de correlación y en el apéndice 2.A se presenta el estudio de la función de correlación cerca del punto crítico.

2.3. El grupo de renormalización

2.3.1. El método de Kadanoff y la hipótesis de scaling

A continuación, vamos a introducir el concepto de renormalización, siguiendo las ideas de Kadanoff (1967), es decir, considerando el problema desde el punto de vista de la física estadística. El objetivo original era justificar la hipótesis de scaling. La primera idea sobre como actúa la renormalización

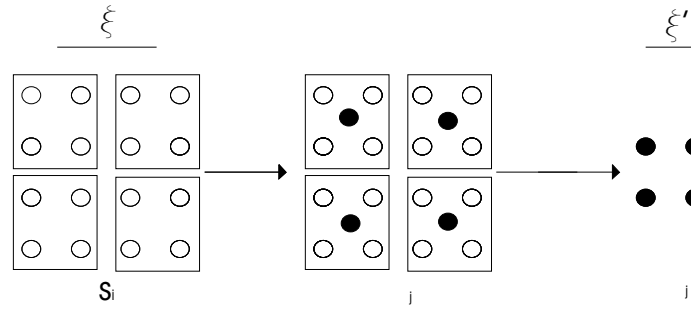


Figura 2.1: Blocking en una red cuadrada (los puntos negros representan las nuevas variables de spin después de la transformación), y el proceso de reescalado posterior.

aparece al tratar de desarrollar un método para resolver un sistema físico-estadístico mediante la reducción de grados de libertad. Si el contenido físico del sistema no ha de cambiar, ello deberá implicar, además de la reducción de grados de libertad, un cambio en los parámetros e interacciones que definen el sistema. Consideremos un modelo de Ising d -dimensional. Cerca del punto crítico la longitud de correlación ξ del sistema es muy grande, de acuerdo con los resultados experimentales, y diverge cuando la temperatura alcanza la temperatura crítica T_c . Por lo tanto podemos considerar que cerca del punto crítico tomamos grupos de spins muy correlacionados ('clusters'), tal que casi todos los spins en los clusters tienen el valor $+1$ o -1 . Si ahora dentro de cada cluster hacemos bloques (blocking)¹ de lado L , y definimos una variable de spin nueva como promedio de todos los spins del bloque

$$\sigma_j = \frac{\sum_{i \in j} s_i}{L^d}, \quad (2.25)$$

entonces todos los bloques σ_j que están dentro del cluster también tendrán el mismo valor. El resultado es que hemos reducido el número de grados de libertad de N spins iniciales a $N' = \frac{N}{L^d}$ bloques al final del proceso. Pero la física no ha cambiado, pues la estructura de clusters sigue siendo la misma. Sin embargo los parámetros del sistema necesariamente han de cambiar para que la física no varíe. Esto se ve claramente en el modo en que deberán interaccionar ahora los bloques. La hipótesis más simple es la propuesta por Kadanoff para el cambio de la temperatura y el campo externo

$$s_i \longrightarrow \sigma_j, \quad (2.26)$$

$$(t, H) \longrightarrow (\tilde{t}, \tilde{H}). \quad (2.27)$$

Nuestra principal tarea será determinar estos nuevos parámetros en término de los antiguos, esto es, una relación matemática de forma

$$\tilde{H} = \tilde{H}(H, t), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(H, t), \quad (2.28)$$

donde dichas funciones dependerán del método utilizado en el procedimiento de blocking, teniendo en cuenta que

$$\text{si } t = 0, \quad H = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{t} = 0, \quad \tilde{H} = 0 \quad (2.29)$$

Kadanoff formuló la siguiente hipótesis:

$$\tilde{H} = HL^x, \quad \tilde{t} = tL^y, \quad (2.30)$$

que es una manera de transformar estas funciones al hacer el blocking. La magnitud L es el factor de contracción lineal.

¹Otra forma de eliminar grados de libertad es mediante el método de la decimación, que elimina simplemente un conjunto de spins de forma alternada y deja los otros como están. En este caso no cambia la variable s_i , pero si los parámetros del sistema. Este método se verá en el capítulo siguiente.

Si bajo estas transformaciones la información física no ha de variar, entonces la función de partición será la misma

$$Z_N(H, t) = Z_{N'}(\tilde{H}, \tilde{t}), \quad (2.31)$$

de donde obtenemos un potencial termodinámico intensivo

$$g(H, t) = \frac{\ln Z_N(H, t)}{N} = \frac{\ln Z_{N'}(\tilde{H}, \tilde{t})}{N} \frac{N'}{N'} = L^{-d} g(\tilde{H}, \tilde{t}), \quad (2.32)$$

por lo tanto llegamos al siguiente resultado

$$g(H, t) = L^{-d} g(HL^x, tL^y), \quad (2.33)$$

el cuál implica que $g(H, t)$ es una GHF. Por tanto, vemos que el proceso de blocking aporta argumentos que nos llevan a la hipótesis de scaling.

Una vez llegado a este punto podemos aplicar el desarrollo de la sección 2, teniendo en cuenta que los exponentes x y y se relacionan con s y r en la forma

$$s = -\frac{x}{d}, \quad r = -\frac{y}{d} \quad (2.34)$$

Podemos avanzar un poco más si consideramos que la longitud de correlación espacial ha de verificar la ecuación

$$\xi(H, t) = L\xi(L^x H, L^y t), \quad (2.35)$$

que a campo cero y considerando la elección del parámetro arbitrario anterior, $L^y t = 1$, se puede expresar de la forma

$$\xi(0, t) = |t|^{-\frac{1}{y}} \xi(0, \pm 1), \quad (2.36)$$

y si comparamos con el exponente crítico experimental de la función de correlación, $\xi(0, t) \sim |t|^{-\nu}$, obtenemos que $\nu = \frac{1}{y}$. Además, podemos obtener una nueva ley de scaling $d\nu = 2 - \alpha$, la cuál es conocida como la ley de hyperscaling, debido a que contiene explícitamente la dimensión del sistema. Esta hipótesis de scaling para la longitud de correlación puede ser justificada de diversas maneras. El aspecto principal es notar que en el punto crítico ξ es infinita.

2.3.2. Generalidades básicas del Grupo de Renormalización

El método del blocking puede verse como una forma alternativa de obtener la función de partición. Establecer la relación entre las características físicas de un punto crítico y la renormalización necesita de un poco más de desarrollo.

A continuación haremos un estudio de las transformaciones del grupo de renormalización, y veremos como estas mantienen la física del sistema invariante. El punto relevante es ver si éstas transformaciones tienen un punto fijo y cuales son sus propiedades.

Consideremos ahora las ideas de Kadanoff. Partimos de un cierto hamiltoniano $\mathcal{H}[\mathbf{k}, \{s_i\}, N]$, que en principio será de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{kT} H = Nk_0 + k_1 \sum_i s_i + k_2 \sum_{ij} s_i s_j + k_3 \sum_{ij} s_i s_j + k_4 \sum_{ijk} s_i s_j s_k + \dots \quad (2.37)$$

donde el término de k_2 corresponde a la interacción a primeros vecinos y el término de k_3 corresponde a la interacción con los siguientes vecinos. A continuación definimos el vector de las constantes de acoplamiento: $\vec{k} = (k_0, k_1, k_2, \dots)$.

La función de partición, a partir de la cual determinaremos las funciones termodinámicas, tendrá la forma

$$Z(\mathbf{k}, N) = \sum_{\{s_i\}} e^{-\mathcal{H}}. \quad (2.38)$$

De acuerdo con Kadanoff, podemos separar la suma en bloques. Dividiremos las configuraciones de manera adecuada para sumar primero en cada bloque y luego sumar los bloques entre sí.

$$Z(\mathbf{k}, N) = \sum_{\{s_i\}} e^{-\mathcal{H}[\mathbf{k}, \{s_i\}, N]} = \sum_{\{\sigma_j\}} e^{-\mathcal{H}[\mathbf{k}_L, \{\sigma_j\}, NL^{-d}]} = Z(\mathbf{k}_L, NL^{-d}). \quad (2.39)$$

Obtenemos la misma función de partición después de la transformación. Por tanto, la física es invariante al reducir el número de grados de libertad.

Todo esto es un procedimiento formal a través del cual obtenemos un hamiltoniano efectivo. A partir de esta función de partición podemos calcular la función de Gibbs intensiva,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{k}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(\mathbf{k}, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(\mathbf{k}_L, NL^{-d}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} L^{-d} \frac{1}{NL^{-d}} \ln Z(\mathbf{k}_L, NL^{-d}) = L^{-d} g(\mathbf{k}_L). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tenemos así una relación entre la función de Gibbs para los spines y la función de Gibbs para los bloques. La clave está en encontrar cómo son las \mathbf{k}_L . La implementación práctica del blocking conduce a las transformaciones

$$\mathbf{k}_L = T(\mathbf{k}) \quad \mathbf{k}_{nL} = T(\mathbf{k}_{(n-1)L}). \quad (2.41)$$

Nos interesa saber si hay un punto fijo, para ello deberemos encontrar si

$$\exists \mathbf{k}^* \text{ tal que } \mathbf{k}^* = T(\mathbf{k}^*). \quad (2.42)$$

Como se puede ver en la figura 2.2, tras sucesivas transformaciones se llega al punto fijo.

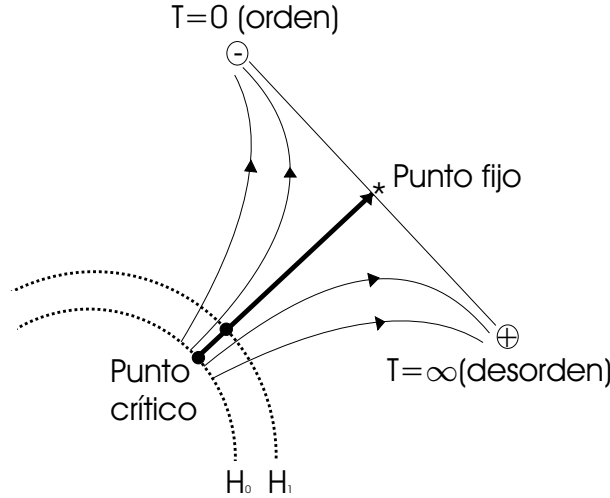


Figura 2.2: H_0 es el hamiltoniano inicial y H_1 es el transformado por el Grupo de Renormalización en el primer paso. Puntos inicialmente conectados suavemente pueden separarse hacia regiones distantes que representan estados físicos finales muy diferentes. Cada hamiltoniano renormalizado H_i tiene un punto crítico (línea gruesa) que acaba en el punto fijo no trivial $*$. Mientras que $+$ y $-$ representan los estados asintóticos para temperaturas altas y bajas respectivamente.

Supongamos que sólo tenemos dos constantes de acoplamiento. Si queremos estudiar las propiedades del punto fijo en el caso de tener dos parámetros $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, actuaremos de la siguiente manera: primero definimos la diferencia respecto del punto fijo del parámetro transformado y del parámetro inicial

$$\delta \mathbf{k}_L = \mathbf{k}_L - \mathbf{k}^*, \quad \delta \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}^*$$

y a continuación podemos definir una transformación lineal entre la variable $\delta \mathbf{k}_L$ y $\delta \mathbf{k}$ válida entorno del punto fijo

$$\delta \mathbf{k}_L = \bar{A}|_{\mathbf{k}^*} \delta \mathbf{k}, \quad (2.43)$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial k_{1L}}{\partial k_1} & \frac{\partial k_{1L}}{\partial k_2} \\ \frac{\partial k_{2L}}{\partial k_1} & \frac{\partial k_{2L}}{\partial k_2} \end{array} \right)_{\mathbf{k}^*}. \quad (2.44)$$

La manera de proceder ahora es encontrar los autovalores (λ_1, λ_2) y las autofunciones $(\delta u_1, \delta u_2)$, por lo tanto, después de aplicar n veces la transformación del grupo de renormalización tendremos que

$$\begin{aligned} \delta u_{nL,1} &= \lambda_1^n \delta u_1, \\ \delta u_{nL,2} &= \lambda_2^n \delta u_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

que nos permite definir un criterio para conocer si aplicando la teoría del grupo de renormalización nos alejamos o acercamos al punto fijo. El criterio es

$$\begin{cases} \text{Si } \lambda > 1 \rightarrow \delta u_{nL} > \delta u, \text{ la autofunción asociada es relevante (nos alejamos del punto fijo).} \\ \text{Si } \lambda < 1 \rightarrow \delta u_{nL} < \delta u, \text{ la autofunción asociada es irrelevante (nos acercamos al punto fijo).} \end{cases}$$

Este comportamiento está indicado en la figura 2.3.

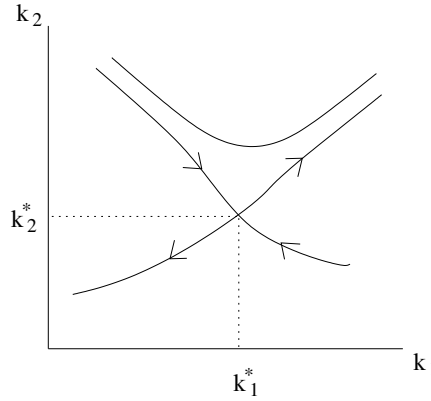


Figura 2.3: Ejemplo de punto fijo de tipo "punto silla".

A continuación vamos a encontrar el exponente² de la longitud de correlación, ν , para ilustrar el método. Si comparamos $g(t, B) = \lambda g_s(\lambda^s t, \lambda^r B)$ donde $\delta u_1 \rightarrow t$ y $\delta u_2 \rightarrow B$, con el resultado $g(\delta u_1, \delta u_2) = L^{-d} g(\lambda_1 \delta u_1, \lambda_2 \delta u_2)$, válido cerca del punto crítico, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= L^{-d} \\ \lambda_1 &= \lambda^s \\ \lambda_2 &= \lambda^r \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= L^{-ds} \\ \lambda_2 &= L^{-dr} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} s &= -\frac{\ln \lambda_1}{\ln L} \\ r &= -\frac{\ln \lambda_2}{\ln L} \end{aligned} \right., \quad (2.48)$$

De esta manera hemos obtenido dos exponentes críticos a partir de los valores propios λ . A continuación vamos a encontrar el exponente ν de la longitud de correlación. Partimos de la función de scaling para la longitud de correlación (ξ)

$$\xi(\delta u_1, \delta u_2) = L \xi(\lambda_1 \delta u_1, \lambda_2 \delta u_2),$$

²Un exponente crítico dominante, λ , puede definirse como

$$f(\varepsilon) = A \varepsilon^\lambda (1 + B \varepsilon^y + \dots), \quad y > 0. \quad (2.46)$$

Donde $A \varepsilon^\lambda$ es la parte singular y $(1 + B \varepsilon^y + \dots)$ es la parte no singular de la función. Para obtener el exponente procedemos de la siguiente manera

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (2.47)$$

a continuación, asumimos que

$$\lambda_1 > 1 > \lambda_2, \quad \delta u_1 \sim t, \quad \delta u_2 = 0, \quad (2.49)$$

por lo tanto, obtenemos

$$\xi(t) = L\xi(\lambda_1 t). \quad (2.50)$$

Los resultados experimentales nos indican la siguiente dependencia

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad (2.51)$$

Comparando con las expresiones (2.50) y (2.51) se obtiene la siguiente relación

$$|t|^{-\nu} \sim L|\lambda_1 t|^{-\nu} \simeq L\lambda_1^{-\nu}|t|^{-\nu}. \quad (2.52)$$

y por tanto, tenemos

$$L\lambda_1^{-\nu} = 1 \Rightarrow \ln L - \nu \ln \lambda_1 = 0, \quad (2.53)$$

de donde obtenemos el exponente en función del autovalor λ_1 , y del parámetro de contracción lineal L ,

$$\nu = \frac{\ln L}{\ln \lambda_1} \quad \lambda_1 > 1 > \lambda_2. \quad (2.54)$$

Así pues hemos visto como puede obtenerse un exponente crítico físico a partir de las transformaciones definidas en el Grupo de Renormalización. El resto de exponentes se obtienen a partir de (2.48).

2.4. Universalidad

2.4.1. Puntos fijos, puntos críticos y universalidad

Los resultados experimentales indican que diferentes sistemas críticos pueden ser clasificados en clases de universalidad, de manera análoga a la tabla de elementos de Mendeleev. Recordemos que dos sistemas pertenecen a la misma clase de universalidad si sus exponentes críticos y sus funciones de scaling coinciden. El problema es cómo saber si dos sistemas con hamiltonianos diferentes presentan la misma clase de universalidad.

Un hamiltoniano define una variedad geométrica o ecuación de estado. Por tanto, diversos sistemas con diferentes ecuaciones de estado (que presentan un punto crítico) definirán cada uno de ellos una variedad. Diremos que pertenecen a la misma clase de universalidad si aplicando transformaciones sucesivas del grupo de renormalización se llega al mismo punto fijo desde cada uno de ellos, como se representa en la figura 2.4.

En la figura 2.4 se puede diferenciar entre los puntos críticos de cada sistema (puntos de significado físico) y el punto fijo, punto puramente matemático al que llegan los sistemas de una misma clase de universalidad tras aplicar las transformaciones del grupo de renormalización. Será necesario ver que relación hay entre ellos, o lo que es lo mismo, cuáles son las magnitudes relevantes que deciden la clase de universalidad para sistemas físicos tan diferentes.

2.4.2. Ejemplos de clases de universalidad

Uno de los principales puntos que debe ser entendido en el mundo de los fenómenos críticos es por qué sistemas macroscópicos diferentes tienen el mismo comportamiento cerca del punto crítico. De hecho, se considera que los parámetros relevantes que caracterizan un sistema cerca del punto crítico son el alcance de la interacción microscópica (siempre corto en este tipo de fenómenos), la dimensión del espacio euclídeo, y las simetrías de las variables microscópicas. Las diferentes clases de universalidad pueden ser clasificadas con la ayuda de dos modelos simples, el modelo de Potts y el modelo n-vector.

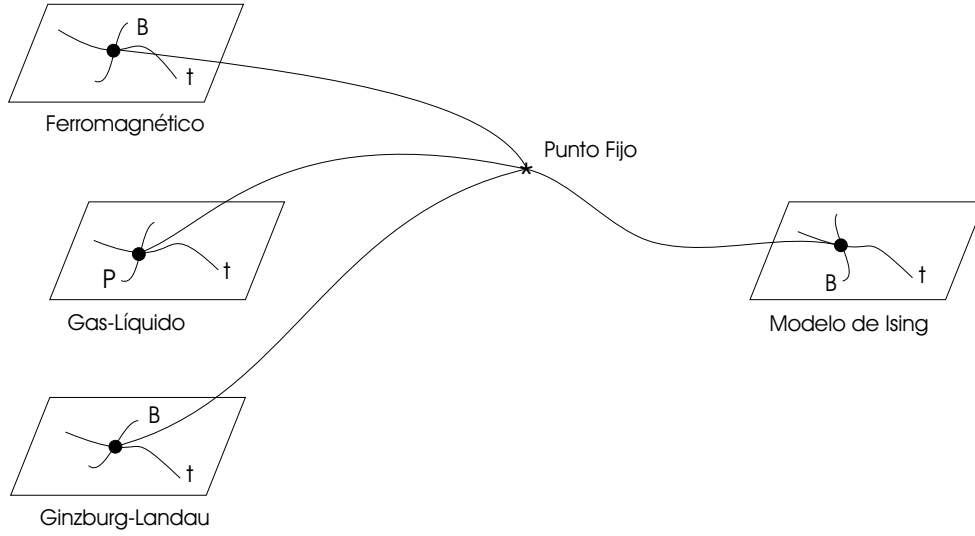


Figura 2.4: La aplicación reiterada de una transformación del grupo de renormalización, con el correspondiente 'rescaling', induce un flujo de la subvariedad. Las trayectorias críticas acaban en un punto fijo *. El espacio de los hamiltonianos contiene generalmente otros puntos fijos no triviales, describiendo distintos tipos de universalidad.

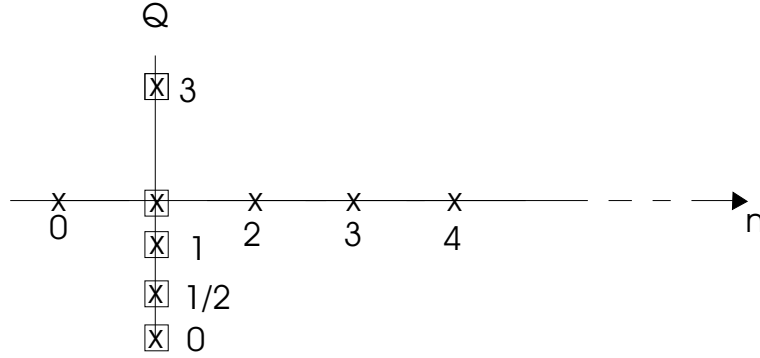


Figura 2.5: Esquema de las diferentes clases de universalidad.

Consideremos primero el modelo de Potts, consistente en una variable microscópica s con Q valores posibles, y con una interacción de la forma

$$H_{ij} = -J\delta_{s_i, s_j}, \quad (2.55)$$

solamente para primeros vecinos. Un caso de particular importancia es $Q = 2$ el cuál corresponde al modelo de Ising. Otros casos son $Q = 0$, el cuál corresponde a percolación y $Q = 3$, el cuál es útil para la interpretación del comportamiento experimental de transiciones de fase estructurales.

Por otro lado, en el modelo n -vector, la variable microscópica (el spin) es un vector con componentes $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, normalizado adecuadamente ($\sum s_i^2 = 1$), con una interacción de la forma

$$H_{ij} = -J\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j. \quad (2.56)$$

El caso $n = 1$ corresponde al modelo de Ising, $n = 2$ al modelo XY, y $n = 3$ es el modelo de Heisenberg.

Es importante tener en cuenta que las variables son continuas en este modelo. Un esquema para organizar las diferentes clases de universalidad se muestra en la figura 2.5.

La gran mayoría de sistemas conocidos que exhiben un comportamiento crítico pertenecen a la clase de universalidad de uno de estos modelos. Por ejemplo, la universalidad del Helio-4 es la misma

que la del modelo XY, y el problema de Self-Avoided-Walk (SAW, polímeros) corresponde a un modelo n -vector con n igual a cero. El caso $n = -2$ corresponde al modelo de random walks, mientras que $n = 4, 6, 8, \dots$ pueden corresponder a sistemas antiferromagnéticos. Finalmente, el modelo n -vector con $n = \infty$, conocido como el modelo esférico, pertenece a la misma clase de universalidad que el gas ideal de Bose (ver [Sta99]).

2.5. Conclusiones

Como hemos visto, la idea de Kadanoff nos ayuda a entender la hipótesis de scaling. El éxito del grupo de renormalización proviene de la invención por parte de Wilson de una formulación potente y elegante que permite realizar diversos cálculos explícitos que ponen de manifiesto las variables relevantes.

¿Cuál es el estado actual del conocimiento de los fenómenos críticos? Desde el punto de vista numérico, gracias a las computadoras modernas, casi todas las magnitudes relacionadas con los fenómenos críticos pueden ser calculadas con la precisión deseada. Desde el punto de vista experimental también ha mejorado la precisión, y no hay demasiados problemas sin resolver. Los problemas surgen principalmente en los aspectos conceptuales y teóricos de los fenómenos críticos. Por ejemplo, no existe un método claro para predecir la temperatura crítica de un sistema dado. Si consideramos sistemas que pueden parecer similares como CO_2 , H_2O , SO_2 observamos sin embargo que tienen temperaturas críticas muy diferentes.

Otro problema que permanece abierto es determinar teóricamente el dominio del régimen crítico frente al régimen no singular de un sistema dado. No hay argumentos para explicar por qué en algunos sistemas se mantiene el scaling no más de un 1 por ciento más allá del punto crítico y para otros se mantiene hasta en un 40 por ciento.

Hoy en día, los esfuerzos se concentran en el estudio de sistemas dinámicos, donde el tiempo juega un papel importante, a diferencia del caso estático estudiado hasta el momento. Fruto de ello es la aparición de nuevos conceptos importantes como *emergencia* (relacionado en como aparece el comportamiento cooperativo de n sistemas) y *herencia* (relacionado con las reglas que rigen el comportamiento de los diferentes sub-sistemas en los que se organiza un sistema en el cuál viven organismos a diferentes niveles. Un ejemplo de tales sistemas es la Tierra).

Además de concentrarse en otros aspectos, el trabajo conceptual sobre los fenómenos críticos está encontrando cada día más aplicación en otros ámbitos de la ciencia, desde la química y la biología hasta la econofísica. Esto se debe a que la formulación de los fenómenos críticos es aplicable a sistemas compuestos de sub-unidades interactuantes, donde la longitud de correlación puede ser infinita.

Apéndice 2.A La hipótesis de scaling en la función de correlación

En este capítulo hemos visto como la hipótesis de escala sobre un potencial termodinámico y la longitud de correlación conduce a la predicción de ciertas leyes y funciones de escala que pueden comprobarse experimentalmente. Existen tambien otros observables físicos que contiene información relevante sobre las propiedades observables cerca de un punto crítico. En estos ocupa un lugar muy relevante la función de correlación espacial, cuya transformada de Fourier es observable mediante experimentos de scattering. A continuación vamos a ver como aparece y las consecuencias de la hipótesis de escala sobre la función de correlación.

La función de correlación a parejas para el un modelo de spins en una red espacial se define como,

$$\Gamma(r, t) \equiv \langle (s_i - \langle s \rangle) (s_j - \langle s \rangle) \rangle, \quad (2.57)$$

y para el mismo modelo despues de hacer bloques,

$$\Gamma(\tilde{r}, \tilde{t}) \equiv \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle) (\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle, \quad (2.58)$$

donde $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ y $\tilde{r} = |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta| = r/L$ ³. Los promedios estadísticos están hechos sobre la distribución de Boltzmann de equilibrio.

Empezaremos por definir un nuevo parámetro \mathcal{L} de la forma siguiente:

$$L^{-d} \sum_{i \in \alpha} s_i = \mathcal{L} \tilde{s}_\alpha. \quad (2.59)$$

Si suponemos que dentro del bloque todos los spins tienen el mismo valor, esta definición se simplifica de la forma

$$s_i = \mathcal{L} \tilde{s}_\alpha, \quad (2.60)$$

y si la sustituimos en (2.58) encontramos la relación,

$$\Gamma(r, t) = \mathcal{L}^2 \Gamma(\tilde{r}, \tilde{t}). \quad (2.61)$$

Ahora vamos a estimar la dependencia del parámetro \mathcal{L} en función del valor L , y para ello usaremos el término dependiente del campo en el Hamiltoniano del modelo de Ising, que puede escribirse, para el modelo de bloques, de la forma

$$\beta \mathcal{H}_{bloq} = -\tilde{h} \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_\alpha, \quad (2.62)$$

y para el modelo de spins inicial

$$\beta \mathcal{H} = -h \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i \in \alpha} s_i = -h \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_\alpha L^d \mathcal{L}. \quad (2.63)$$

De esta última expresión sacamos la identificación

$$\tilde{h} = L^d \mathcal{L} h = L^x h. \quad (2.64)$$

Ahora, si se definen las propiedades de escala de nuestro parámetro \mathcal{L} en la forma,

$$\mathcal{L} \propto L^\chi, \quad (2.65)$$

obtenemos que

$$\tilde{h} = L^{d+\chi} h. \quad (2.66)$$

Recordando (2.64), podemos relacionar x y χ ,

$$\chi = x - d. \quad (2.67)$$

Finalmente a partir de (2.61), (2.65) y (2.67) se obtiene

$$\Gamma(r, t) = L^{2(x-d)} \Gamma(L^{-1}r, L^y t, L^x h), \quad (2.68)$$

esto es, que la función de correlación a pares realmente es una Función Homogénea Generalizada.

Como L es un parámetro arbitrario podemos tomar $L = r$, y si además nos preocupamos únicamente del punto crítico, $h = 0, t = 0$, llegamos a

$$\Gamma(r, 0) = r^{2(x-d)} \Gamma(1, 0) \propto r^{2(x-d)}, \quad (2.69)$$

que nos interesa comparar con la definición del comportamiento que se espera experimentalmente cerca del punto crítico,

$$\Gamma(r, t \equiv 0) \propto r^{-(d-2+\eta)}. \quad (2.70)$$

³No confundir los diferentes significados de la letra r que irán apareciendo: módulo del vector diferencia de posiciones espaciales, exponente crítico y parametro del acoplamiento cuadrático. En cada caso el significado quedará claro por el contexto

Todo esto conduce a la relación entre exponentes

$$\eta = -2x + d + 2. \quad (2.71)$$

Si combinamos este resultado con los ya conocidos de, $\nu = 1/y$, $s = -\frac{y}{d}$, $r = -\frac{x}{d}$ y $\gamma = \frac{2x+1}{s}$, llegamos a la ley de scaling de Fisher

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (2.72)$$

que relaciona los exponentes críticos de la función de correlación ν y η o χ , con la dimensión y el exponente de la susceptibilidad γ . Todo ello sin aumentar el número de exponentes independientes (x, y) o (r, s) .

Capítulo 3

Grupo de renormalización en espacio real

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a presentar el estudio de diferentes sistemas físicos usando las técnicas del grupo de Renormalización introducidas en el capítulo anterior, aplicadas en el *espacio real*. En el siguiente capítulo presentaremos el estudio de otros sistemas pero usando el Grupo de Renormalización en *espacio de momentos*.

Nuestro principal objetivo ahora es familiarizarnos en la práctica del Grupo de Renormalización en aquellos sistemas físicos de los que se tiene ya un perfecto conocimiento de sus propiedades tengan o no punto crítico.

La idea subyacente en todos los ejemplos que vamos a considerar es la de realizar eliminaciones ordenas y sistemáticas de spines de forma que no perdamos información física. Este procedimiento puede hacerse de dos formas: eliminando spines individualmente (decimación o mediante bloques (blocking)). Ambos casos pueden verse gráficamente en las figuras 3.1 y 3.2, respectivamente.

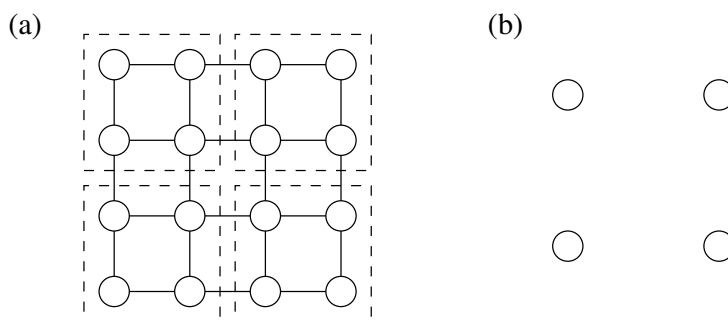


Figura 3.1: Ejemplo de blocking. (a) Agrupamos spines en bloques. (b) La transformación genera un nuevo spin correspondiente a cada celda.

Empezaremos por los casos más sencillos unidimensionales que pueden resolverse exactamente pero que no presentan punto crítico. De todos modos es útil convencerse de que el Grupo de Renormalización es capaz de obtener la función de partición exacta de estos modelos. Finalmente abordaremos modelos en dos dimensiones. La solución no será exacta pero sí que veremos como aparecen el punto crítico y sus propiedades.

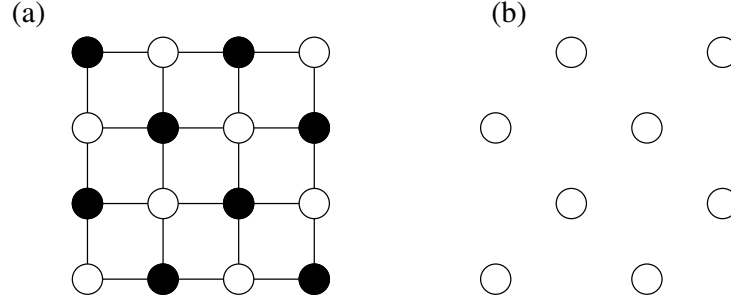


Figura 3.2: Ejemplo de decimación. (a) Eliminamos los spines marcados en negro. (b) En este caso la transformación genera un red cuadrada de lado diferente y simetría girada.

3.2. Sistemas en una dimension

Hemos seleccionado tres sistemas unidimensionales: los modelos de Ising ferromagnético y antiferromagnético y el modelo esférico.

3.2.1. El modelo de Ising ferromagnético en una dimensión

Consideremos el modelo de Ising en una dimensión cuyo Hamiltoniano es [MK78]

$$\frac{H}{k_B T} = -K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i - N J_0, \quad (3.1)$$

donde B es un posible campo magnético externo y $N J_0$ es un término extensivo de fondo. Estamos interesados en encontrar la función de partición de los n spines, que viene dada por la expresión

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{-\frac{H}{k_B T}} = \sum_{\{s_1\}\{s_2\}\dots} e^{-\frac{H}{k_B T}}. \quad (3.2)$$

Para sumar la función de partición vamos a utilizar el método de la decimación, esto es, vamos a eliminar unos cuantos spines de manera que el sistema conserve las mismas propiedades, en éste caso, que el hamiltoniano de nuestro sistema tenga la misma forma. Éste proceso producirá un cambio en los parámetros de nuestro hamiltoniano, K, J_0, B .

Debido a la simetría de nuestro sistema, la decimación adecuada es eliminar los spines pares (o impares), de forma que una vez sumados, nuestro sistema será el mismo pero con la mitad de spines (y diferentes parámetros).

Vamos a considerar uno de los spines que eliminamos con sus respectivos vecinos, teniendo en cuenta que hay dos spines que se suman por cada vecino, tendremos que dividir por dos la contribución de los vecinos al término lineal. Consideraremos $J_0 = 0$ para hacer el proceso más ágil y simple,

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)} e^{B(s_1/2 + s_2 + s_3/2)} &= e^{K(s_1 + s_3) + B} e^{B/2(s_1 + s_3)} + e^{-K(s_1 + s_3) - B} e^{B/2(s_1 + s_3)} \\ &= 2 \cosh(K(s_1 + s_3) + B) e^{B/2(s_1 + s_3)} \\ &\equiv f(K, B) e^{K' s_1 s_3 + B'/2(s_1 + s_3)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde en el último paso hemos impuesto que el nuevo hamiltoniano conserve la misma estructura inicial, pero con posibles nuevos parámetros (K', B') . La relación de éstos con los parámetros iniciales nos permitirá encontrar las transformaciones del grupo de renormalización e iterarlas hasta sumar la función de partición.

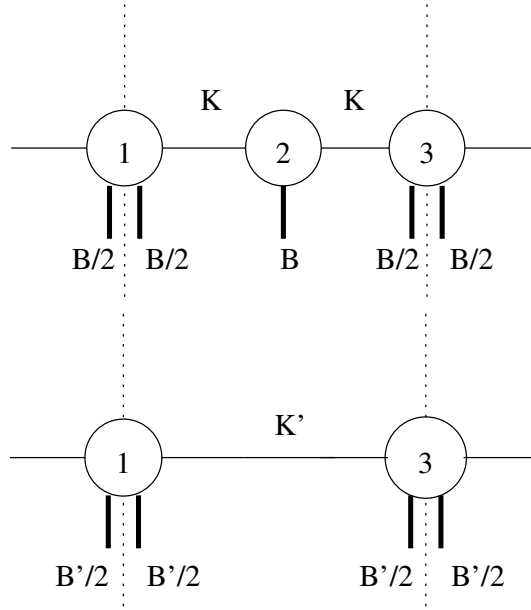


Figura 3.3: Decimación en el modelo de Ising unidimensional. Eliminando el spin central "2" generamos las transformaciones $K \rightarrow K'$ y $B \rightarrow B'$.

Para encontrar la relación que hay entre los parámetros actuales y los iniciales, tenemos que escoger los valores posibles de los spines s_1 y s_3 , lo que nos da tres ecuaciones independientes,

$$2 \cosh(2K + B) e^B = f(K, B) e^{K' + B'} , \quad (3.4)$$

$$2 \cosh B = f(K, B) e^{-K'} , \quad (3.5)$$

$$2 \cosh(2K - B) e^{-B} = f(K, B) e^{K' - B'} , \quad (3.6)$$

en donde hemos tomado $s_1 = s_3 = +1$ en la primera ecuación, $s_1 = -s_3 = +1$ en la segunda, y $s_1 = s_3 = -1$ en la tercera. El objetivo ahora es encontrar la dependencia de los nuevos parámetros en función de los antiguos. Para ello, realizamos los siguientes cálculos,

$$\frac{(3.4)}{(3.6)} = \frac{\cosh(2K + B)}{\cosh(2K - B)} = e^{2(B' - B)} \rightarrow B' = B + \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh(2K + B)}{\cosh(2K - B)} , \quad (3.7)$$

$$\frac{(3.4)}{(3.5)} = \frac{\cosh(2K + B) e^B}{\cosh B} = e^{2K' + B'} \rightarrow K' = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\cosh(2K - B) \cosh(2K + B)}}{\cosh B} , \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (3.4) &\rightarrow \ln f(K, B) = 2e^{K'} \cosh B \\ &= \frac{1}{2} \ln \sqrt{\cosh(2K - B) \cosh(2K + B)} 4 \cosh B . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con esto ya hemos obtenido las transformaciones del grupo de renormalización $\vec{K}' = T(\vec{K})$, y por consiguiente la siguiente recurrencia para la función de partición

$$Z(K, B, N) = f(K, B)^{N/2} Z(K', B', N/2) . \quad (3.10)$$

A partir de este punto observamos que, de hecho, la cantidad interesante para nosotros no es la función de partición en sí misma, sino su logaritmo, puesto que es proporcional al potencial termodinámico, esto es, $\ln Z(N, K, B) = NF(K, B)$. Utilizando esta relación, la recurrencia (3.10) nos queda

$$F(K, B) = \frac{1}{2} \ln f(K, B) + \frac{1}{2} F(K', B') . \quad (3.11)$$

Ahora vamos a usar el hecho de que ya sabemos que el punto crítico, si existiera estaría en $B = 0$, y así simplificar el cálculo, puesto que de (3.7), $B = 0 \rightarrow B' = 0$. Después de esta simplificación, nuestras ecuaciones quedan de la siguiente manera

$$F(K) = \frac{1}{2} \ln f(K) + \frac{1}{2} F(K') , \quad (3.12)$$

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K , \quad (3.13)$$

$$\ln f(K) = \ln 2 + K' , \quad (3.14)$$

es decir, sólo tenemos K como parámetro relevante. Ahora cabe preguntarse si existe algún punto crítico. Se puede ver directamente que no lo hay pues los únicos puntos que són solución de imponer la condición de punto crítico, $K = K' = K^*$, son $K^* = 0$ y $K^* = \infty$, es decir, que no hay ningún punto crítico no trivial, como era de esperar, puesto que en el modelo de Ising en una dimensión no hay transición de fase.

A pesar de no encontrar puntos críticos, podemos usar las técnicas del grupo de renormalización para encontrar la solución del modelo de Ising en una dimensión (ya que éste es resoluble analíticamente), para esta finalidad tenemos que resolver la recurrencia (3.12) una vez substituido lo que vale $f(K)$ en función de K' , ec (3.14),

$$\begin{aligned} F(K) &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} K' + \frac{1}{2} F(K') \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} K' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} K'' + \frac{1}{2} F(K'') \right) \\ &= \ln 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \frac{K'}{2} + \frac{K''}{4} + \dots \\ &= \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n'}}{2^n} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

El primer término de la parte izquierda de la igualdad (3.15) es simplemente $\ln 2$. Para saber lo que vale el segundo término, primero tenemos que resolver la recurrencia (3.13). Para ello haremos una serie de cambios de variables que nos facilitaran el cálculo. Así podemos reexpresar la recurrencia (3.13) de la forma

$$e^{2K'} = \frac{e^{2K} + e^{-2K}}{2} . \quad (3.16)$$

Con lo que se nos pone de manifiesto que el cambio natural de variables debe de ser

$$x' = e^{2K'} , \quad (3.17)$$

$$x = e^{2K} , \quad (3.18)$$

y por lo tanto, tenemos que

$$x' = \frac{x + 1/x}{2} . \quad (3.19)$$

Ahora podemos comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$x' + 1 = \frac{(x + 1)^2}{2x} , \quad (3.20)$$

$$x' - 1 = \frac{(x - 1)^2}{2x} , \quad (3.21)$$

que conducen a una nueva recurrencia para la variable x ,

$$\frac{x' + 1}{x' - 1} = \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^2 . \quad (3.22)$$

Haciendo ahora un último cambio de variables,

$$\xi = \frac{x+1}{x-1} , \quad (3.23)$$

llegamos finalmente a una relación de recurrencia más sencilla,

$$\xi' = \xi^2 . \quad (3.24)$$

Ahora debemos sustituir esta recurrencia en (3.15), pero no lo podemos hacer directamente, puesto que tenemos que ver que relación hay entre la nueva variable ξ y nuestro parámetro K . Ésta es,

$$\xi = \frac{x+1}{x-1} = \frac{e^{2K} - 1}{e^{2K} + 1} = \tanh K . \quad (3.25)$$

Esta relación se puede invertir utilizando propiedades de las tangentes hiperbólicas,

$$K = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} . \quad (3.26)$$

Ahora ya podemos expresar el término $K^{n'}$ en función de ξ muy fácilmente,

$$K^{n'} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi^{2^n}}{1-\xi^{2^n}} , \quad (3.27)$$

y por lo tanto podemos plantearnos solucionar el segundo término de la igualdad (3.15) con garantías de éxito,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \frac{K^{n'}}{2^n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1} \frac{1}{2^n} \ln \frac{1+\xi^{2^n}}{1-\xi^{2^n}} \\ &= \ln \prod_{n=1} \left(\frac{1+\xi^{2^n}}{1-\xi^{2^n}} \right)^{1/2^{n+1}} . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para evaluar el productorio de la ecuación (3.28) hacemos uso de la relación del Gradstein,

$$\frac{1}{1-y} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+y^{2^{n+1}}}{1-y^{2^{n+1}}} \right)^{1/2^{n+1}} , \quad (3.29)$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \frac{K^{n'}}{2^n} &= \ln \frac{1}{1-\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}} , \end{aligned} \quad (3.30)$$

de donde podemos obtener, finalmente

$$\begin{aligned} F(K) &= \ln 2 + \ln \frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}} \\ &= \ln \frac{2}{(1-\xi^2)^{1/2}} \\ &= \ln (2 \cosh K) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta es justamente la solución del modelo de Ising unidimensional, para $B = 0$.

3.2.2. Modelo de Ising antiferromagnético en dimensión 1

Introducción al modelo

Para el modelo de Ising unidimensional antiferromagnético el hamiltoniano efectivo es el siguiente

$$\mathcal{H} = \frac{H}{K_B T} = J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i, \quad (3.32)$$

$$J > 0, \quad (3.33)$$

Una vez hemos escrito el hamiltoniano del problema, procedemos a la reducción de los grados de libertad mediante el proceso de decimación. En este caso es importante que dicho proceso de decimación preserve la simetría del problema de forma que una vez eliminados los spins el sistema continúe siendo antiferromagnético. Por esta razón hay que eliminar los spins por parejas tal y como se puede ver en la figura 3.4.

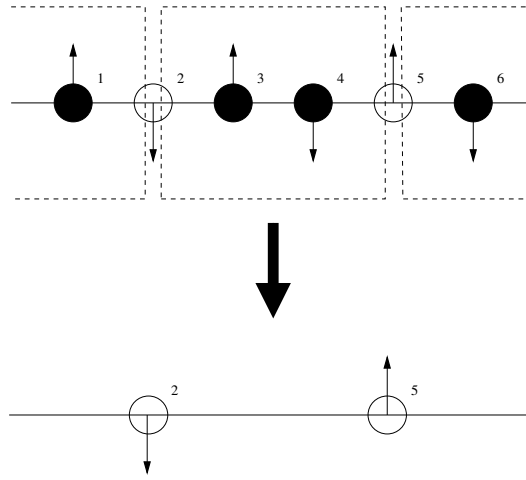


Figura 3.4: Decimación del modelo de Ising antiferromagnético 1d.

Renormalización

El próximo paso consiste en eliminar los grados de libertad de la celda elemental escogida. Esto se traduce en considerar la función de partición de la celda en cuestión y sumar para todos los posibles valores de los spins que contiene

$$\begin{aligned} Z_{3,4} &= \sum_{s_3, s_4} e^{-J(s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_5) + B(s_3 + s_4) + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} \\ &= \sum_{s_3 = \pm 1} e^{-J(s_2 s_3 + s_3 + s_5) + B(s_3 + 1) + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} \\ &\quad + \sum_{s_3 = \pm 1} e^{-J(s_2 s_3 - s_3 - s_5) + B(s_3 - 1) + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} \\ &= e^{-J(s_2 + 1 + s_5) + 2B + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} + e^{-J(s_2 - 1 - s_5) + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} \\ &\quad + e^{-J(s_2 - 1 + s_5) + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} + e^{-J(-s_2 + 1 - s_5) - 2B + \frac{B}{2}(s_2 + s_5)} \\ &= 2e^{\frac{B}{2}(s_2 + s_5)} [e^{-J} \cosh(J(s_2 + s_5)) + e^J \cosh(J(s_2 - s_5))]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En el proceso de renormalización se debe preservar la física del sistema con lo cual la función de partición de la celda renormalizada coincide con la de la celda original. Por tanto,

$$Z_{3,4} = f(J, B) e^{-J'(s_2 s_5) + \frac{B'}{2}(s_2 + s_5)}. \quad (3.35)$$

De esta forma, igualando (3.34) y (3.35) podemos obtener una ecuación que nos relacione los parámetros del sistema original con los del sistema renormalizado en función de s_2 y s_5 ,

$$2e^{\frac{B}{2}(s_2+s_5)} [e^{-J} \cosh(J(s_2+s_5)) + e^J \cosh(J(s_2-s_5))] = f(J, B)e^{-J'(s_2s_5)+\frac{B'}{2}(s_2+s_5)}. \quad (3.36)$$

Haciendo que s_2 y s_5 tomen todos sus posibles valores en la expresión anterior, es decir, $s_2, s_5 = \pm 1$, se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones independientes

$$2e^B [e^{-J} \cosh(2J-2B) + e^J] = f(J)e^{(-J'+B')}, \quad (3.37)$$

$$2[e^{-J} \cosh(2B) + e^J \cosh(2J)] = f(J)e^{J'}, \quad (3.38)$$

$$2e^{-B} [e^{-J} \cosh(2J+2B) + e^J] = f(J)e^{-(J'+B')}, \quad (3.39)$$

Dividiendo (3.37) por (3.39) se encuentra la siguiente expresión para B' ,

$$B' = B + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{e^{-J} \cosh(2J-2B) + e^J}{e^{-J} \cosh(2J+2B) + e^J} \right]. \quad (3.40)$$

Procediendo de la misma manera, dividiendo (3.37) por (3.38) y utilizando la expresión para B' se obtiene la constante de acoplamiento renormalizada,

$$J' = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{e^{-J} \cosh(2B) + e^J \cosh(2J)}{\sqrt{[e^{-J} \cosh(2J-2B) + e^J][e^{-J} \cosh(2J+2B) + e^J]}} \right\}. \quad (3.41)$$

Finalmente, a partir de (3.38) y utilizando la expresión que acabamos de obtener para J' encontramos $f(J, B)$,

$$f(J, B) = 2[e^{-J} \cosh(2B) + e^J \cosh(2J)]^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sqrt{[e^{-J} \cosh(2J-2B) + e^J][e^{-J} \cosh(2J+2B) + e^J]} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

De esta forma, la función de partición para el sistema se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Z(J, B, N) &= \sum_{\{s\}} e^{-\mathcal{H}} \\ &= \sum_{\{s_2, s_5, \dots\}} (f(J, B))^{\frac{N}{3}} e^{-\mathcal{H}'} \\ &= (f(J, B))^{\frac{N}{3}} Z(J', B', N/3). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cálculo de la función de partición

El grupo de renormalización en espacio real para el modelo de Ising antiferromagnético unidimensional sólo se puede resolver exactamente cuando el campo externo es nulo. Por tanto, nos vamos a centrar en el caso $B = 0$. De esta forma podremos comparar los resultados con los obtenidos para el caso ferromagnético.

En estas condiciones, imponemos $B = 0$ en las expresiones anteriores para los parámetros del sistema renormalizado. Las nuevas expresiones son las siguientes

$$B' = 0, \quad (3.43)$$

$$J' = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^{-J} + e^J \cosh(2J)}{e^J + e^{-J} \cosh(2J)} \right), \quad (3.44)$$

$$f(J) = 2\sqrt{1 + 3 \cosh^2(2J)}, \quad (3.45)$$

Los puntos fijos son aquellos que son invariantes bajo una transformación del grupo de renormalización. De (3.44) se deduce que la condición

$$J' = J = J^*, \quad (3.46)$$

da las soluciones $J^* = 0$ y $J^* = \infty$, que son los dos puntos fijos triviales.

Resolver el modelo de Ising antiferromagnético exactamente consiste en encontrar la función de partición $Z(J, N)$, o, lo que es equivalente, la energía libre de Helmholtz intensiva. De esta manera, definimos el siguiente potencial intensivo

$$F(J) = \frac{\ln(Z(J, N))}{N}. \quad (3.47)$$

Teniendo en cuenta que $Z(J, N) = (f(J))^{\frac{N}{3}} Z(J', N')$, podemos obtener la siguiente relación de recurrencia mediante la aplicación de sucesivas transformaciones del grupo de renormalización definidas por (3.44) y (3.45)

$$\begin{aligned} F(J) &= \frac{\ln(Z(J, N))}{N} \\ &= \frac{N \ln(f(J))}{3 \cdot \frac{N}{3}} + \frac{1 \ln(Z(J', N/3))}{3 \cdot \frac{N}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \ln(1 + 3 \cosh^2(2J)) + \frac{g(J')}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \ln(1 + 3 \cosh^2(2J)) \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3^2} \ln(1 + 3 \cosh^2(2J')) + \frac{g(J')}{3^2} \\ &= \dots = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln(1 + 3 \cosh^2(2J^{(n-1)})). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nos interesa encontrar una relación de recurrencia para la constante de acoplamiento $J^{(n-1)}$ de forma que la podamos escribir en términos de la constante de acoplamiento original. De esta manera tendremos el sumatorio de (3.48) en función de J y, si se puede sumar exactamente, habremos resuelto el problema.

Vamos pues a encontrar la relación de recurrencia para la constante de acoplamiento. Partiendo de (3.44), se puede deducir la siguiente expresión

$$\begin{aligned} e^{2J'} &= \frac{e^{-J} + e^J \cosh(2J)}{e^J + e^{-J} \cosh(2J)} \\ &= \frac{2e^{-J} + e^{3J} + e^{-J}}{e^J + e^{-3J} + 2e^J} \\ &= \frac{e^{6J} + 3e^{2J}}{1 + 3e^{4J}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde hemos multiplicado y dividido la segunda línea por e^{3J} para obtener la última igualdad. Si definimos $x = e^{2J}$ y $x' = e^{2J'}$, (3.49) se puede escribir de la siguiente manera

$$x' = \frac{x^3 + 3x}{1 + 3x^2}. \quad (3.50)$$

Sumando primero $+1$ y después -1 a la ecuación anterior se llega a las dos expresiones siguientes

$$x' + 1 = \frac{x^3 + 3x}{1 + 3x^2} + 1 = \frac{(x+1)^3}{1 + 3x^2}, \quad (3.51)$$

$$x' - 1 = \frac{x^3 + 3x}{1 + 3x^2} - 1 = \frac{(x-1)^3}{1 + 3x^2}. \quad (3.52)$$

Dividiendo (3.52) por (3.51) se encuentra la siguiente relación de transformación sencilla

$$\frac{x' - 1}{x' + 1} = \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^3. \quad (3.53)$$

Si definimos una nueva variable ξ de forma que $\xi = \frac{x-1}{x+1}$, la transformación escrita en términos de esta variable es especialmente sencilla

$$\xi' = \xi^3 \Rightarrow \xi^{(n)} = \xi^{3^n}.$$

Notamos que podemos escribir la constante de acoplamiento en función de ξ de manera que se puede determinar su evolución bajo sucesivas transformaciones del grupo de renormalización

$$\xi = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{e^{2J} - 1}{e^{2J} + 1} = \tanh(J), \quad (3.54)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right), \quad (3.55)$$

de manera que,

$$\begin{aligned} J^{(n)} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi^{(n)}}{1 - \xi^{(n)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi^{3^n}}{1 - \xi^{3^n}} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Finalmente y teniendo en cuenta que $\cosh(2J) = \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}$, podemos escribir el potencial intensivo en función de la constante de acoplamiento original

$$\begin{aligned} F(J) &= \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln \left[1 + 3 \left(\frac{1 + (\xi^{(n-1)})^2}{1 - (\xi^{(n-1)})^2} \right)^2 \right] \\ &= \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln \left[1 + 3 \left(\frac{1 + \xi^2 \cdot 3^{n-1}}{1 - \xi^2 \cdot 3^{n-1}} \right)^2 \right] \\ &= \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln \left[\frac{4 \left(1 + \xi^2 \cdot 3^{n-1} + \xi^4 \cdot 3^{n-1} \right)}{(1 - \xi^2 \cdot 3^{n-1})^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

El primero de los sumatorios que aparecen en (3.57) es conocido y su valor es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}. \quad (3.58)$$

El segundo de los sumatorios ha de tener necesariamente como resultado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln \left[\frac{4 \left(1 + \xi^2 \cdot 3^{n-1} + \xi^4 \cdot 3^{n-1} \right)}{(1 - \xi^2 \cdot 3^{n-1})^2} \right] = \ln \left(\frac{2}{1 - \xi^2} \right) = \ln [2 \cosh^2(J)]. \quad (3.59)$$

Que las expresiones anteriores son una identidad puede comprobarse numéricamente calculando uno y otro lado de la ecuación. Los resultados de ambos cálculos se presentan en la siguiente tabla

ξ	lado izquierdo	lado derecho
0,3	0,78745657	0,78745788
0,5	0,98082798	0,98082923
0,7	1,36649048	1,36649168
0,9	2,35387659	2,35387826

Para calcular el lado izquierdo hemos cogido doce términos en el sumatorio. Hay que tener en cuenta, a partir de la expresión de la variable ξ en (3.54), que dicha variable sólo puede tomar valores entre -1 y $+1$.

Finalmente, juntando (3.58) y (3.59), obtenemos el potencial intensivo para el modelo de Ising unidimensional antiferromagnético

$$\begin{aligned} F(J) &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln [2 \cosh^2(J)] \\ &= \ln [2 \cosh(J)]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Este resultado coincide con el resultado exacto y con el resultado obtenido para el modelo de Ising unidimensional ferromagnético. Este hecho no es de extrañar ya que cuando se resuelve el problema exactamente no es necesario hacer ninguna hipótesis referente al signo de la constante de acoplamiento del hamiltoniano, J .

Introducción al modelo antiferromagnético en dimensión 2

Finalmente vamos a comentar brevemente la aplicación de las técnicas de renormalización presentadas en los apartados anteriores al caso del sistema antiferromagnético bidimensional.

Ya sabemos que la diferencia esencial con el caso ferromagnético es que la configuración energéticamente más favorable para dos spines contiguos es ahora la de tener signo contrario. En éste caso, no podemos eliminar spines de forma alternada como en el caso ferromagnético ni en parejas como en el caso anterior, ya que estas transformaciones no reproducirían correctamente las propiedades magnéticas del estado fundamental del sistema. Es necesario generar una transformación que se aplique a bloques más grandes de spines que conserven la simetría del estado fundamental, tal y como se muestra en la figura 3.5.

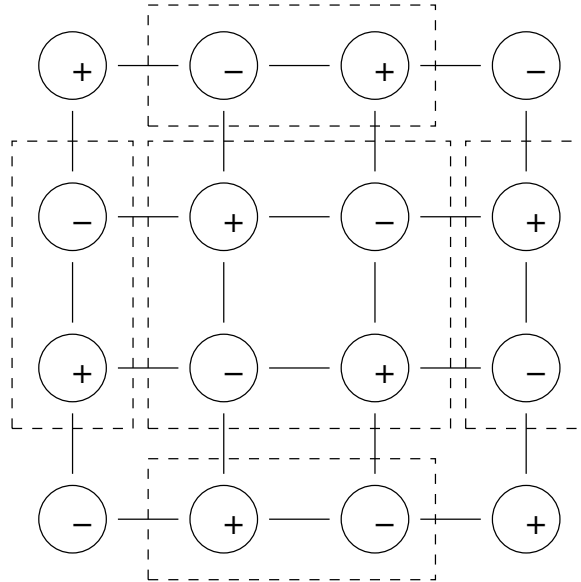


Figura 3.5: Decimación en el modelo de Ising 2D antiferromagnético. Se seleccionan bloques de spin para conservar la simetría del estado fundamental del sistema.

Como consecuencia de ello, la dificultad crecerá enormemente, y por ello no lo estudiaremos.

3.2.3. Modelo esférico

El modelo esférico unidimensional se define como una serie de N spines, x_i que pueden tomar cualquier valor real y que están sujetos a la restricción de que su suma cuadrática sea igual a N ,

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = N . \quad (3.61)$$

En general, el Hamiltoniano de este sistema tiene la siguiente forma

$$\mathcal{H}(x) = - \sum_{i \neq j} J_{ij} x_i x_j - H \sum_i x_i . \quad (3.62)$$

En nuestro caso, estudiemos el caso correspondiente a campo externo nulo y con interacción a primeros vecinos,

$$H = 0 \quad J_{ij} := J \delta_{i+1,j} . \quad (3.63)$$

Con esto, podemos escribir el Hamiltoniano de forma más sencilla, con una suma sobre un único índice,

$$\beta \mathcal{H}(x) = -K \sum_{i=1}^N x_i x_{i+1} , \quad (3.64)$$

como se puede ver, hemos redefinido la constante de interacción, poniendo $K = \beta J$.

Una vez definido nuestro Hamiltoniano, y para poder encontrar la energía libre debemos calcular la función de partición canónica que, teniendo en cuenta que los spines pueden tomar un conjunto continuo de valores, tiene la siguiente expresión,

$$Z(K, N) = \int_{S^N} \exp \left(K \sum_{i=1}^N x_i x_{i+1} \right) \prod_{i=1}^N dx_i , \quad (3.65)$$

donde, como se ve, la integral se realiza sobre una N -esfera de radio N . Para aplicar el método de decimación, integraremos las variables pares, reduciendo el número de variables a la mitad. Posteriormente, iteraremos este procedimiento. Pero el dominio de integración que tenemos, hace que el cálculo de la suma sea complicado. Para solventar este obstáculo, conviene relajar la condición (3.61), substituyéndola por

$$\left\langle \sum_{i=1}^N x_i^2 \right\rangle = N . \quad (3.66)$$

Con esta nueva condición estamos fijando el valor medio del número de partículas, lo que significa que ahora estamos abordando el problema desde la colectividad macrocanónica. Veamos como queda la función de partición macrocanónica, que escribimos ahora, por conveniencia, para un sistema de $2N$ spines,

$$Z_{2N}^{MC}(K, s) = \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_{2N} \exp \left(K \sum_{i=1}^{2N} x_i x_{i+1} - s \sum_{i=1}^{2N} x_i^2 \right) . \quad (3.67)$$

El paso a la macrocanónica conlleva la suma para todo número de partículas, lo cual nos facilitará el cálculo; y, al mismo tiempo conlleva la aparición de un nuevo multiplicador de Lagrange, s , que quedará determinado al imponer la condición

$$\left\langle \sum_{i=1}^{2N} x_i^2 \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial s} \left[\ln Z_{2N}(K, s) \right] = 2N . \quad (3.68)$$

Ahora estamos en condición de comenzar a aplicar el proceso de decimación. Como ya hemos dicho, en primer lugar integraremos los spines pares. Para ello, deberemos evaluar N integrales como la siguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-s x^2 + K x(x_1 + x_3)] = \left(\frac{\pi}{s} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{K^2 x_1 x_3}{2s} + \frac{K^2 (x_1^2 + x_3^2)}{4s} \right] . \quad (3.69)$$

Utilizando este resultado y realizando el cambio de variables $y_i = x_{2i+1}$, con $i = 1, 2, \dots, N$, obtenemos

$$Z_{2N}^{MC}(K, s) = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{N/2} \int \dots \int dy_1 \dots dy_N \exp \left[\frac{K^2}{2s} \sum_{i=1}^N y_i y_{i+1} - \left(s - \frac{K^2}{2s}\right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] . \quad (3.70)$$

Si ahora realizamos otro cambio de variables, poniendo $x_i = (K/2s)^{1/2} y_i$, podemos ver que el término de la derecha es proporcional a la función de partición macrocanónica de N spines, con lo cual obtenemos la relación

$$Z_{2N}^{MC}(K, s) = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{N/2} Z_N^{MC}(K, s') , \quad (3.71)$$

donde

$$s' = \frac{2s^2}{K} - K . \quad (3.72)$$

La relación (3.72), nos da la transformación del grupo de renormalización,

$$s_{i+1} = \frac{2s_i^2}{K} - K . \quad (3.73)$$

Esto significa que la constante de interacción K , no sufre ninguna transformación, y que por lo tanto, este modelo no presenta ningún punto crítico. La transformación de s no tiene un significado físico, ya que, como hemos dicho, esta constante queda fijada al imponer la condición (3.68).

Veamos ahora como solucionar esta relación de recurrencia. En primer lugar, por comodidad escribiremos N como 2^n , con lo cual la relación (3.71) se escribe

$$Z_{2^{n+1}}^{MC}(K, s) = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^{n-1}} \cdot Z_{2^n}^{MC}(K, s') . \quad (3.74)$$

Para $Z_{2^n}^{MC}(K, s')$, esta relación se escribiría como

$$Z_{2^n}^{MC}(K, s') = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^{n-2}} \cdot Z_{2^{n-1}}^{MC}(K, s'') . \quad (3.75)$$

Substituyendo esto en (3.73), nos damos cuenta de que

$$Z_{2^{n+1}}^{MC}(K, s) = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j} \cdot Z_2^{MC}(K, s_n) . \quad (3.76)$$

Ahora, tan sólo nos queda realizar la suma del exponente y calcular la función de partición para dos spines. Lo primero, es trivial, ya que se trata de una progresión geométrica,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2 - 2^{-n+1} , \quad (3.77)$$

por lo tanto

$$Z_{2^{n+1}}^{MC}(K, s) = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^n - 1} \cdot Z_2^{MC}(K, s_n) . \quad (3.78)$$

Para el cálculo de Z_2^{MC} , necesitamos hacer previamente algunas consideraciones sobre las condiciones de contorno. Hasta ahora no hemos hecho ninguna referencia a éstas, pero necesitamos especificarlas para hacer el cálculo de forma coherente. Vamos a imponer condiciones periódicas de contorno, en las que el spin N -ésimo interactúa con el primero. Esto significa que, en el hamiltoniano para dos spines, debemos considerar dos veces el término de interacción. Con esto ya podemos evaluar la función de partición de dos spines,

$$Z_2^{MC}(K, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp[2K x_1 x_2 - s_n x_1^2 - s x_2^2] , \quad (3.79)$$

ésta es una integral gaussiana que es fácil de resolver,

$$Z_2^{MC}(K, s_n) = \pi \sqrt{s_n^2 - K^2} . \quad (3.80)$$

Lo único que queda por hacer es resolver la recurrencia (3.73). Antes de hacerlo, debemos dedicar un momento de atención a un detalle que hemos pasado por alto. Para poder realizar la integral gaussiana en (3.80), debemos poder asegurar que $s_n > 0$, $\forall n$. Observando la relación (3.73), vemos que para garantizar esto, basta con imponer que $s_n^2 \geq K^2/2$, $\forall n$. De todas maneras, por motivos que veremos de inmediato, impondremos una condición más fuerte,

$$s_n^2 \geq K^2 \quad \forall n . \quad (3.81)$$

Redefinamos las variables s_i ,

$$s'_i = \frac{s_i}{K} , \quad (3.82)$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= \frac{2s_i^2}{K} - K \longrightarrow s'_{i+1} = 2s_i'^2 - 1 , \\ s_i^2 &\geq K^2 \longrightarrow s_i'^2 \geq 1 . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Esta relación de recurrencia, recuerda mucho a la relación del coseno hiperbólico del ángulo doble,

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 , \quad (3.84)$$

además, el rango de variación de nuestra variable, $(1, \infty)$, es precisamente el mismo que el del coseno hiperbólico (esta es la razón de la condición (3.81)). Todo esto sugiere claramente el cambio $s'_i = \cosh \theta_i$, con el que podemos escribir

$$s'_{i+1} = \cosh \theta_{i+1} = \cosh 2\theta_i \implies \theta_{i+1} = 2\theta_i \implies \theta_{i+1} = 2^{i+1}\theta_0 , \quad (3.85)$$

donde $\theta_0 \equiv \cosh^{-1} s'_0 \equiv \cosh^{-1} s'$, y por lo tanto,

$$s_n = K s'_n = K \cosh \theta_n = K \cosh 2^n \theta_0 . \quad (3.86)$$

Por fin tenemos todas las piezas para poder calcular la función de partición. Para ello sólo tenemos que substituir los resultados (3.80) y (3.86) en la relación (3.78),

$$\begin{aligned} Z_{2^n+1}^{MC}(K, s) &= \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^n-1} \cdot \pi (K^2 \cosh^2 2^n \theta_0 - K^2)^{-1/2} \\ &= \left(\frac{2\pi}{K}\right)^{2^n-1} \cdot \pi [K \sinh 2^n \theta_0]^{-1} , \end{aligned} \quad (3.87)$$

Para poder encontrar la energía libre, en la colectividad macrocanónica, primero tenemos que calcular el gran potencial Ξ , que se puede obtener como,

$$\Xi = -\beta^{-1} \ln Z^{MC} . \quad (3.88)$$

Recordemos que s no es más que un multiplicador de Lagrange que, con lo que sabemos de termodinámica, podemos identificar con $-\beta\mu$, donde μ es el potencial químico. Además, recordemos que la relación entre la energía libre y el gran potencial es

$$(F = \Xi + \mu N) . \quad (3.89)$$

Con todo esto, la energía libre intensiva se podrá obtener como

$$-\beta f = 2^{-(n+1)} \ln Z_{2^n+1}^{MC} + s . \quad (3.90)$$

Tomando el límite termodinámico tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(n+1)} \ln Z_{2^{n+1}}^{MC} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^{-(n+1)} \ln \left(\frac{2\pi}{K} \right)^{2^n - 1} \cdot \pi [K \sinh 2^n \theta_0]^{-1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{K} - 2^{-n-1} \ln [\sinh 2^n \theta_0] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{2\pi}{K} - \theta_0 \right] . \end{aligned} \quad (3.91)$$

Substituyendo el valor de θ_0

$$\theta_0 = \cosh^{-1} \frac{s}{K} = \ln \left[\frac{s}{K} + \sqrt{\frac{s^2}{K^2} - 1} \right] , \quad (3.92)$$

tal y como hemos definido en (3.85). Ahora tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(n+1)} \ln Z_{2^{n+1}}^{MC} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2\pi} \left[s + \sqrt{s^2 - K^2} \right] . \quad (3.93)$$

Recordemos que el valor de s debe ser determinado a partir de la condición (3.68), que podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(n+1)} \ln Z_{2^{n+1}}^{MC} \right) = 1 , \quad (3.94)$$

y que nos da

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4K^2} . \quad (3.95)$$

Substituyendo esto en (3.93), y luego, todo ello en (3.90) obtenemos, por fin, el resultado final,

$$\beta f = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1}{4\pi} \left(1 + \sqrt{1 + 4K^2} \right) \right) - \sqrt{1 + 4K^2} \right] . \quad (3.96)$$

Estos cálculos han sido realizados a partir de las indicaciones de [Tho88].

3.3. Modelos en dos dimensión

En el apartado anterior hemos resuelto el modelo de Ising en una dimensión, pero hemos quedado insatisfechos, puesto que éste no tiene transición de fase alguna. Es natural pues, plantearnos el mismo problema en dimensión 2 para ver como aparece la transición de fase. Hemos escogido el mismo modelo de Ising ferromagnético pero en dos simetrías diferentes: red cuadrada y red triángular. Ello conllevará dos métodos también diferentes de resolución: decimación y blocking respectivamente

3.3.1. Modelo de Ising en la red cuadrada

Cálculo general

Partimos del Hamiltoniano habitual,

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j , \quad \sigma_i = \pm 1 . \quad (3.97)$$

En la figura 3.6 se observa que una vez realizada la decimación aparecerán nuevos parámetros,

$$K_1 \longrightarrow (K'_1, K'_2, K'_4) . \quad (3.98)$$

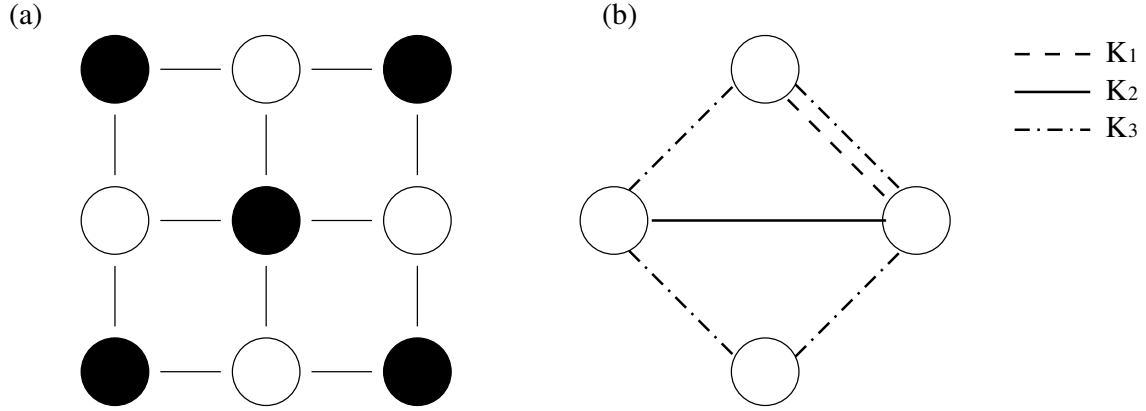


Figura 3.6: Decimación en el modelo de Ising 2D. (a) Eliminamos los spines marcados en negro. (b) La decimación genera diferentes constantes de acoplamiento entre los spines.

Como nuestra hipótesis es que el sistema físico es el mismo una vez realizada la decimación, debemos suponer que existen unas K_2 y K_4 iniciales, que en nuestro caso, son nulas, esto es

$$(K_1, K_2 = 0, K_4 = 0) \longrightarrow (K'_1, K'_2, K'_4) . \quad (3.99)$$

Ahora ya sólo nos queda proceder como en el caso anterior. Si consideramos la función de partición,

$$\begin{aligned} Z(\vec{K}, N) &= \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{\sigma_i\}_{i \neq 0}} e^{-\beta H} \sum_{\{\sigma_0\}} e^{K(\sigma_0 \sigma_1 + \sigma_0 \sigma_2 + \sigma_0 \sigma_3 + \sigma_0 \sigma_4)} \\ &= \sum_{\{\sigma_i\}_{i \neq 0}} e^{-\beta H} \left(e^{K(\sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_4)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_4)} \right) \\ &\equiv f(K)^{N/2} \sum_{\{\sigma_i\}_{i \neq 0}} e^{K_1 \sum_{1 \text{ vec}} \sigma_i \sigma_j + K_2 \sum_{2 \text{ vec}} \sigma_i \sigma_k + K_4 \sum_{4 \text{ vec}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l} , \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde los sumatorios en la última expresión son sobre las interacciones representadas en la figura 3.6. Si nos restringimos a analizar sólo el caso de eliminar el spin σ_0 , escribiendo sólo los términos afectados por éste (como en el apartado anterior), obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} e^{K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} \\ = f(K) e^{K_1/2(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1)} e^{K_2(\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4)} e^{K_4(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)} . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Considerando ahora los posibles valores de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, de forma análoga al caso anterior, obtenemos las siguientes 4 ecuaciones independientes,

$$e^{4K} + e^{-4K} = f(K) e^{2K_1 + 2K_2 + K_4} , \quad (3.102)$$

$$e^{2K} + e^{-2K} = f(K) e^{-K_4} , \quad (3.103)$$

$$2 = f(K) e^{-2K_2 + K_4} , \quad (3.104)$$

$$2 = f(K) e^{-2K_1 + 2K_2 + K_4} , \quad (3.105)$$

que, si las combinamos de la siguiente forma,

$$\frac{(3.104)}{(3.105)} \longrightarrow 1 = e^{2K_1 - 4K_2} \longrightarrow K_2 = \frac{K_1}{2} , \quad (3.106)$$

$$\frac{(3.102)}{(3.104)} \longrightarrow \cosh 4K = e^{2K_1 + 4K_2} \longrightarrow 2K_1 + 4K_2 = \ln \cosh 4K . \quad (3.107)$$

Juntando estas dos últimas relaciones tenemos,

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K, \quad K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K. \quad (3.108)$$

Por último,

$$\frac{(3.104)}{(3.103)} \longrightarrow \frac{1}{\cosh 2K} = e^{-2K_2+2K_4} \longrightarrow K_4 = \ln \left[(\cosh 4K)^{1/8} (\cosh 2K)^{-1/2} \right], \quad (3.109)$$

$$(3.103) \longrightarrow f(K) = e^{K_4} 2 \cosh 2K = 2 (\cosh 4K)^{1/8} (\cosh 2K)^{1/2}. \quad (3.110)$$

De esta forma, ya podemos escribir la transformacin de nuestros parámetros,

$$K'_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K_1 + K_2, \quad (3.111)$$

$$K'_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K_1. \quad (3.112)$$

Mientras que K'_4 es una transformacin complicada que ahora no nos interesa puesto que vamos a suponer que es suficientemente pequeña para despreciarla y de esta forma llegar a alguna solución explícita. Ello llevará necesariamente a obtener resultados aproximados.

Aproximaciones de Maris y Kadanoff

Empezaremos en primer lugar estudiando las aproximaciones de Maris–Kadanoff [MK78],

(a) Si $K_2 = 0$, entonces, $K'_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K_1$. Para encontrar el punto crítico, hacemos el cambio de variables $e^{4K^*} = y$, con lo cual la ecuación del punto crítico queda de la forma

$$2y = y \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) \longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad (3.113)$$

Que traducido a K^* , queda de la forma

$$y = 1 \longrightarrow K^* = 0, \quad T \longrightarrow \infty, \quad (3.114)$$

$$y = 0 \longrightarrow K^* = \infty, \quad T \longrightarrow 0. \quad (3.115)$$

Y consiguientemente, no hay solución no trivial, i.e, transición de fase a temperatura finita.

(b) Si en cambio hacemos la siguiente hipótesis,

$$K_2 = 0, \quad (3.116)$$

$$K'_1 + K'_2 \equiv \tilde{K}'_1. \quad (3.117)$$

Por lo que la ecuación del punto crítico queda de la forma

$$\tilde{K}'_1 = \frac{3}{8} \ln \cosh 4\tilde{K}'_1 \longrightarrow \tilde{K}^* = 0,50698, \quad (3.118)$$

que podemos comparar con el resultado exacto para el modelo de Ising en dimesión 2, que es $\tilde{K}^* = 0,44069$ (solución de la ecuación $\sinh 2K_c = 1$).

Podemos ahora calcular el exponente crítico ν para ver cuanto se aproxima al valor real, para ello, necesitamos el valor propio λ_1 , que viene dado por,

$$\lambda_1 = \left(\frac{d\tilde{K}'_1}{dK_1} \right)_{K_1^*} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sinh 4K_1}{\cosh 4K_1} \right)_{K_1^*} = 1,44888, \quad (3.119)$$

con lo que el exponente crítico ν es

$$\nu = \frac{\ln L}{\ln \lambda_1} = 0,933. \quad (3.120)$$

Donde L es el factor de contracción, que en nuestro caso es $L = \sqrt{2}$. El valor exacto de ν es 1. Aunque el resultado parezca bueno, es simplemente circunstancial.

Aproximación de Thompson

En esta aproximación [Tho88] se considera que K_1 es pequeña, con lo que,

$$\ln \cosh 4K_1 \approx \ln(1 + 8K_1^2) \approx 8K_1^2 . \quad (3.121)$$

Esta aproximación [Tho88] nos lleva a las siguientes ecuaciones del punto crítico,

$$K_1^* = 2K_1^{*2} + K_2^* , \quad (3.122)$$

$$K_2^* = K_1^{*2} . \quad (3.123)$$

La solución es facil de obtener,

$$K_1^* = \frac{1}{3} , \quad (3.124)$$

$$K_2^* = \frac{1}{9} . \quad (3.125)$$

Si queremos encontrar ahora lo que vale el exponente crítico ν , debemos construir la matriz linealizada de la transformación y encontrar los valores propios λ_1 y λ_2 , esto es

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1'}{\partial K_1} & \frac{\partial K_2'}{\partial K_1} \\ \frac{\partial K_1'}{\partial K_2} & \frac{\partial K_2'}{\partial K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{10}) = 1,721 , \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{10}) < 1 . \end{cases} \quad (3.126)$$

Debemos considerar ahora el valor propio más grande, i.e, λ_1 , esto nos da, utilizando la misma fórmula de antes (3.120), $\nu = 0,64$, con lo que el resultado es peor que el obtenido anteriormente, aunque por razones igualmente circunstanciales.

3.3.2. El modelo de Ising en la red triangular

Introducción al modelo

Este modelo de Ising consiste en considerar una serie de puntos (spines) distribuidos de forma regular en un espacio, es decir, distribuidos en forma de red o retículo, que llevan asociada cierta variable σ_i que tan sólo puede tomar los valores ± 1 . Estos spines interaccionan entre si por parejas mediante una interacción de corto alcance (tan sólo consideramos interacción a primeros vecinos), y con un campo externo B . El hamiltoniano de dicha interacción se puede escribir de la forma

$$\beta H(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) = -K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i , \quad (3.127)$$

donde $\langle ij \rangle$ indica suma tan sólo sobre todas las parejas de primeros vecinos. K y B son las constantes de acoplamiento del sistema, que pueden escribirse conjuntamente en un vector de la forma $\mathbf{K} = (K, B, 0, \dots)$.

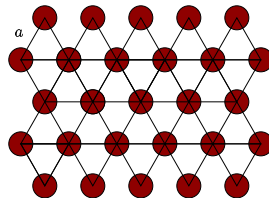
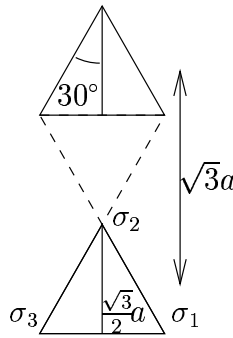
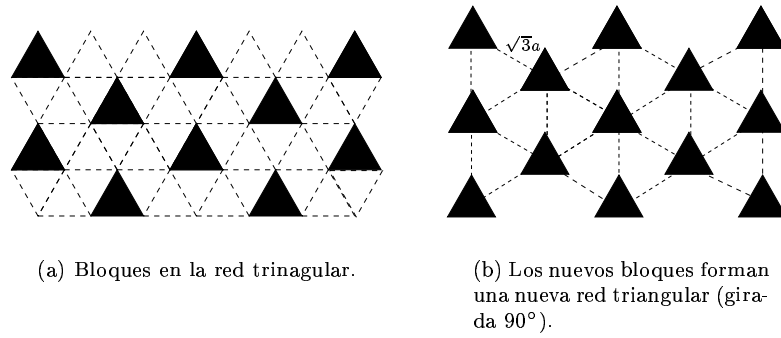


Figura 3.7: Red triangular.

Aquí consideraremos una red triangular [NvL73, Rei98], donde los spines se distribuyen en los vértices de triángulos equiláteros. Esta red se puede visualizar en la figura 3.7. Como vemos, cada spin



(c) Nuevo parámetro de red. Los spines dentro de cada bloque se indicarán de la forma σ_i .

Figura 3.8: Renormalización de la red triangular

tiene un total de seis primeros vecinos, cada uno a distancia a , que es la arista de los triángulos que forman la red.

Para intentar resolver este modelo utilizaremos las técnicas del grupo de renormalización en espacio real de Kadanof, que se basa en realizar una eliminación de variables, y ver como cambian los valores de las constantes de acoplamiento del hamiltoniano. Podemos encontrar el punto crítico como aquel que deja invariantes las constantes de acoplamiento, tal y como vimos en la teoría del Capítulo 2.

Para proceder con la renormalización del modelo de Ising sobre esta red debemos reducir el número de spines de la misma. En este caso, en vez de simplemente eliminar alguno de los spines, es más conveniente agrupar los diferentes spines de tres en tres (*blocking*), de forma que los nuevos bloques formen una nueva red triangular, ver figura 3.8(b).

Aunque no es la única forma de reagrupar los spines en bloques, la que se muestra en la figura 3.8(b) es la más conveniente, ya que es la única forma en que todos los spines de la red original pertenecen a un bloque, y sólo a uno.

Renormalización

Una vez realizado el agrupamiento en bloques, obtenemos una nueva red triangular con un parámetro de orden diferente. Tal y como se puede ver en la figura 3.8(c), el nuevo parámetro de red, a' será igual a la distancia entre los centros de los bloques será el doble de la altura de cada bloque, es decir,

$$a' = 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3}a, \quad (3.128)$$

y por lo tanto, el factor de renormalización, $L = a'/a$, es $L = \sqrt{3}$. Cada bloque B está formado por tres spines, S_i con $i \in B$, $i = 1, 2, 3$. En la nueva red sustituimos estos tres spines por uno sólo, S_B , que como antes queremos que sólo tome los valores $S_B = \pm 1$.

Una forma de asignar el valor al nuevo spin de cada bloque en función del spin que tenían sus componentes es la siguiente

$$S_B = \text{sgn}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \begin{cases} +1 & \text{contiene dos o tres spines positivos} \\ -1 & \text{contiene dos o tres spines negativos} \end{cases}, \quad (3.129)$$

es decir, S_B tomará el valor más abundante entre sus constituyentes. Para cada valor de S_B tenemos cuatro configuraciones internas, que podemos numerar, arbitrariamente, mediante el índice α . En la tabla 3.1 se resumen todas las posibilidades existentes.

α	S_B	σ_1	σ_2	σ_3
1	± 1	± 1	± 1	± 1
2	± 1	∓ 1	± 1	± 1
3	± 1	± 1	∓ 1	± 1
4	± 1	± 1	± 1	∓ 1

Cuadro 3.1: Posibles configuraciones en cada bloque.

La función de partición en la red original se escribe de la forma usual,

$$Z(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})}. \quad (3.130)$$

Podemos expresar la función de partición original como una suma sobre todas las configuraciones de los bloques. Para recorrer todas las posibles configuraciones de un bloque debemos realizar una suma sobre los valores totales, S_B , y las configuraciones internas σ_i ,

$$Z(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) = \sum_{\{S_B\}} \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})}, \quad (3.131)$$

donde el segundo sumatorio se extiende a todas las configuraciones internas de cada bloque.

Nuestro objetivo es poder encontrar un hamiltoniano renormalizado, $H(\mathbf{K}', \{S_B\})$, tal que de lugar a la misma función de partición, que ahora se escribirá de la forma

$$Z(\mathbf{K}', \{S_B\}) = f(\mathbf{K}) \sum_{\{S_B\}} e^{-\beta H(\mathbf{K}', \{S_B\})}, \quad (3.132)$$

donde $\mathbf{K}' = (K', B', 0, \dots)$ representa las constantes de acoplamiento renormalizadas, y $f(\mathbf{K})$ es una función auxiliar necesaria para absorber términos que dependen únicamente de las constantes de acoplamiento originales. Comparando las ecuaciones (3.131) y (3.132) llegamos a la identificación

$$\sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})} = f(\mathbf{K}) e^{-\beta H(\mathbf{K}', \{S_B\})}. \quad (3.133)$$

En general, tratar con la ecuación (3.133) puede ser muy complicado. Para facilitar las cosas, emplearemos la teoría de perturbaciones. Separamos el Hamiltoniano original en los términos que dependen del interior de cada bloque y los que dependen de la interacción entre spines de diferentes bloques,

$$\beta H_0(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) = -K \sum_B \sum_{\substack{i \in B \\ j \in B}} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.134)$$

$$\beta V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) = -K \sum_{B \neq B'} \sum_{\substack{i \in B \\ j \in B'}} \sigma_i \sigma_j - B \sum_B \sum_{i \in B} \sigma_i, \quad (3.135)$$

con lo que la ecuación (3.133) se escribe de la forma

$$\sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H_0(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})} e^{-\beta V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})} = f(\mathbf{K}) e^{-\beta H(\mathbf{K}', \{S_B\})} . \quad (3.136)$$

A primer orden de esta teoría de perturbaciones, podemos evaluar los valores esperados de cualquier cantidad utilizando tan sólo H_0 . Es decir, para una cantidad $A(\{S_B\})$ tenemos

$$\langle A(\{S_B\}) \rangle = \frac{1}{Z_0^N(\{\sigma_i\})} \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H_0(\{\sigma_i\})} A(\{S_B\}) , \quad (3.137)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_0^N(\{\sigma_i\}) &= \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H_0(\{\sigma_i\})} \\ &= \left[\sum_{\sigma_i \in B} e^{-\beta H(\{\sigma_i\})} \right]^N , \end{aligned} \quad (3.138)$$

donde hemos factorizado la contribución de cada bloque a la función de partición en orden cero, que se puede obtener como la suma a todas las parejas de spines internos en cada bloque,

$$\begin{aligned} Z_0(\{\sigma_i\}) &= \sum_{\sigma_i} e^{-\beta H_0(\{\sigma_i\})} = \sum_{\sigma_i} e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)} \\ &= e^{3K} + 3e^{-K} . \end{aligned} \quad (3.139)$$

Observamos que la ecuación (3.136) recuerda al sumatorio del segundo miembro de la ecuación (3.137), lo que nos permite escribir

$$e^{-\beta H(\mathbf{K}', \{S_B\})} = Z_0^N(\{\sigma_i\}) \left\langle e^{-\beta V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\})} \right\rangle . \quad (3.140)$$

Para evaluar el valor esperado de la exponencial podemos realizar un desarrollo en cumulantes,

$$\langle e^{-\beta V} \rangle = e^{-\beta (\langle V \rangle + \frac{1}{2} (\Delta V)^2 + \dots)} . \quad (3.141)$$

Vamos a suponer que es suficiente quedarnos tan sólo con el primer cumulante, es decir, realizaremos el cálculo al primer orden en V ,

$$\langle e^{-\beta V} \rangle \approx e^{-\beta \langle V \rangle} . \quad (3.142)$$

Dado que el valor esperado es lineal, al realizar el calculo del valor esperado de V tendremos términos producto de dos spines. El valor esperado de dos spines se puede factorizar, ya que son variables independientes,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle , \quad (3.143)$$

con lo que tan sólo tenemos que calcular el valor esperado de un spin. Dicho cálculo se puede llevar a cabo empleando la ecuación (3.137),

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z_0(\{\sigma_i\})} \sum_{\sigma_i} \sigma_i e^{-\beta H(\{\sigma_i\})} \quad (3.144)$$

$$= \frac{1}{Z_0(\{\sigma_i\})} \sum_{\sigma_i} \sigma_i e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)} . \quad (3.145)$$

Para evaluar el sumatorio anterior debemos tener en cuenta los dos valores posibles de S_B ,

$$\sum_{\sigma_i} \sigma_i = \left\{ \begin{array}{l} (\text{si } S_B = +1) = e^{3K} + e^{-K} + e^{-K} - e^{-K} \\ (\text{si } S_B = -1) = -e^{3K} - e^{-K} - e^{-K} + e^{-K} \end{array} \right\} = S_B (e^{3K} + e^{-K}) , \quad (3.146)$$

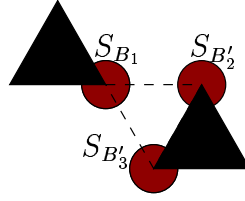


Figura 3.9: Interacción a primeros vecinos.

por lo tanto,

$$\langle \sigma_i \rangle = S_B \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} . \quad (3.147)$$

El coeficiente de esta ecuación aparecerá muy a menudo, por lo que podremos aligerar la notación definiendo

$$\mathcal{A} = \frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} , \quad (3.148)$$

con lo que finalmente tenemos

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathcal{A} S_B . \quad (3.149)$$

Notar que este valor esperado es independiente de i . Así, pues, el valor esperado de V queda de la forma

$$\langle \beta V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) \rangle = -K \sum_{B \neq B'} \sum_{\substack{i \in B \\ j \in B'}} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle - B \sum_B \sum_{i \in B} \langle \sigma_i \rangle . \quad (3.150)$$

El sumatorio del segundo término es trivial, ya que el valor esperado de un sólo spin no depende del valor del índice i ,

$$\sum_{i \in B} \langle \sigma_i \rangle = 3\mathcal{A} S_B . \quad (3.151)$$

Para realizar el sumatorio del primer término de la ecuación (3.150) debemos tener en cuenta que la interacción de los spines originales era tan sólo a primeros vecinos, por lo que tan sólo entrarán en juego los spines que pertenecen a dos bloques adyacentes, B y B' , y que además son primeros vecinos. Observando la figura 3.9 vemos que tan sólo entra en juego la interacción de un sólo spin de el bloque B con dos del bloque B' ,

$$\sum_{\substack{i \in B \\ j \in B'}} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = \langle \sigma_1 \rangle (\langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle) = 2\mathcal{A}^2 S_B S_{B'} , \quad (3.152)$$

y este resultado debe ser sumado para todas las parejas de bloques adyacentes entre si, con tal de tener en cuenta todos los spines de la red original. De nuevo, en el segundo paso de la ecuación (3.152) hemos tenido en cuenta que el valor esperado de un sólo spin es independiente del índice i . Así, pues, ya tenemos todos los ingredientes para calcular el valor esperado de V . Insertando los resultados obtenidos en las ecuaciones (3.151) y (3.152) en la ecuación (3.150), podemos expresar dicho valor esperado de la forma siguiente

$$\langle V(\{\sigma_i\}) \rangle = -K \mathcal{A}^2 \sum_{B \neq B'} S_B S_{B'} - B \mathcal{A} \sum_B S_B . \quad (3.153)$$

Retomamos la ecuación (3.140), que en el primer cumulante se escribe de la forma,

$$Z_0^N(\{\sigma_i\}) e^{-\beta \langle V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) \rangle} = f(\mathbf{K}) e^{-\beta H(\mathbf{K}, \{S_B\})} . \quad (3.154)$$

Tomando logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad tenemos

$$\frac{1}{\beta} N \ln Z_0(\{\sigma_i\}) + \left\langle V(\mathbf{K}, \{\sigma_i\}) \right\rangle = H(\mathbf{K}', \{S_B\}) + \ln f(\mathbf{K}) . \quad (3.155)$$

El primer término del primer miembro de la ecuación (3.155) corresponde a la función auxiliar $f(\mathbf{K})$, ya que $Z_0(\{\sigma_i\})$, dada por (3.139), solamente depende de las constantes de acoplamiento. De esta forma, teniendo en cuenta el resultado (3.153) obtenemos el hamiltoniano renormalizado,

$$H(\mathbf{K}', \{S_B\}) = -2K\mathcal{A}^2 \sum_{B \neq B'} S_B S_{B'} - 3B\mathcal{A} \sum_B S_B . \quad (3.156)$$

Nuestro objetivo es encontrar un hamiltoniano renormalizado que mantenga la misma forma que el Hamiltoniano original, ec. (3.127), pero con las nuevas constantes de acoplamiento,

$$\beta H(\mathbf{K}', \{S_B\}) = -K' \sum_{\langle BB' \rangle} S_B S_{B'} - B' \sum_B S_B . \quad (3.157)$$

Comparando las ecuaciones (3.156) y (3.157) podemos obtener la transformación de las constantes de acoplamiento bajo el grupo de renormalización,

$$K' = 2\mathcal{A}^2 K , \quad (3.158a)$$

$$B' = 3\mathcal{A}B . \quad (3.158b)$$

Análisis del punto fijo

El punto crítico vendrá dado por los puntos críticos de las transformaciones (3.158),

$$K^* = 2\mathcal{A}^2 K^* , \quad (3.159a)$$

$$B^* = 3\mathcal{A}B^* . \quad (3.159b)$$

Los puntos fijos triviales, $K^* = 0$ y $K^* \rightarrow \infty$ no son de interés ya que corresponden a $T \rightarrow \infty$ y $T = 0$. Debe notarse, también, que cualquier punto fijo con $K^* \neq 0$ debe tener necesariamente $B^* = 0$, ya que sino la constante \mathcal{A} estaría bivaluada. Así, pues, el punto fijo no trivial vendrá dado por,

$$B^* = 0 , \quad (3.160)$$

$$\mathcal{A}|_{K^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (3.161)$$

La ecuación (3.161) determina plenamente el valor de K^* ,

$$\frac{e^{4K^*} + 1}{e^{4K^*} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad (3.162)$$

y su solución es

$$K^* = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}) \approx 0,336 . \quad (3.163)$$

Al rededor del punto fijo anterior la transformación (3.158) puede linealizarse calculando la matriz jacobiana

$$\frac{\partial(K', B')}{\partial(K, B)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K'}{\partial K} & \frac{\partial K'}{\partial B} \\ \frac{\partial B'}{\partial K} & \frac{\partial B'}{\partial B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{A}^2 + 4\mathcal{A}K \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial K} & 0 \\ 3B \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial K} & 3\mathcal{A} \end{pmatrix} . \quad (3.164)$$

Necesitamos evaluar las diferentes cantidades en el punto fijo,

$$\mathcal{A}|_{K^*} = 1/\sqrt{2} \approx 0,707 , \quad (3.165)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial K} \right|_{K^*} = \left. \frac{8e^{4K}}{(e^{4K} + 3)^2} \right|_{K^*} = 4\sqrt{2} - 5 \approx 0,657 , \quad (3.166)$$

y, por lo tanto, la matriz jacobiana queda de la forma

$$\frac{\partial(K', B')}{\partial(K, B)} = \begin{pmatrix} 1,624 & 0 \\ 0 & 2,121 \end{pmatrix} . \quad (3.167)$$

Los valores propios de la transformación al rededor del punto crítico son, pues,

$$\lambda_1 = 1,624 , \quad (3.168a)$$

$$\lambda_2 = 2,121 . \quad (3.168b)$$

Donde podemos ver que λ_1 es el valor propio correspondiente a K o temperatura y λ_2 es el correspondiente al campo. A partir de estos valores propios podemos obtener todos los exponentes críticos de la teoría. Por ejemplo, podemos calcular el exponente ν aplicando directamente la fórmula dada en las clases de teoría,

$$\nu = \frac{\ln L}{\ln \lambda_1} \approx 1,133 . \quad (3.169)$$

El segundo exponente que estamos en condiciones de calcular es δ , que viene dado en función del exponente matemático r ,

$$\delta = \frac{r}{1+r} , \quad (3.170)$$

donde

$$\delta = -\frac{\ln \lambda_2}{d \ln L} . \quad (3.171)$$

con lo cual podemos escribir el exponente δ en función del segundo valor propio, λ_2 , y de la constante de reducción L , de la forma

$$\delta = \frac{-1}{1 - d \frac{\ln L}{\ln \lambda_2}} \approx 2,168 . \quad (3.172)$$

Resulta interesante comparar estos valores con los valores exactos, que son conocidos mediante otros métodos. Los resultados exactos son $\nu = 1$ y $\delta = 15$; los valores propios exactos son $\lambda_1 = 1,73$ y $\lambda_2 = 2,80$. Como vemos, los resultados para ν y λ_1 son medianamente buenos, con un error al rededor del 10 %. No obstante, los resultados para δ y λ_2 dejan bastante que desear.

Se puede mejorar la aproximación considerando un mayor número de términos en la expansión en cumulantes, ec. (3.141), hecho que conlleva la necesidad de considerar un mayor número de elementos en el vector \mathbf{K} . Niemeijer y van Leeuwen, [NvL73], considerando la interacción a siete bloques situados en los vértices y centro de un hexágono regular (según la simetría de la red triangular) lograron hallar

$$\nu = 0,973 , \quad (3.173a)$$

$$\delta = 15,017 , \quad (3.173b)$$

resultados mucho más cercanos a los que se conocen de la resolución exacta del modelo de Ising en la red triangular.

Capítulo 4

Grupo de renormalización en espacio de momentos

4.1. Introducción

Vimos en el capítulo anterior que las técnicas de grupo de renormalización en el espacio real eran especialmente aplicables a sistemas reticulados, usualmente descritos por spines en una red. Una configuración del sistema venía dada por $S_{\mathbf{n}}$, el valor de la variable de spin en la posición \mathbf{n} de la red. Nada nos impide realizar una descripción del mismo sistema en terminos de la red recíproca (espacio dual o de Fourier). A través de la transformada de Fourier discreta de $S_{\mathbf{n}}$ podemos desarrollar todo nuestro formalismo del grupo de renormalización, pero centrándonos esta vez en tal transformada de Fourier $S_{\mathbf{k}}$. Los vectores de onda \mathbf{k} se hallarían discretizados, debido a la naturaleza discreta de la red inicial.

Habitualmente, a la hora de desarrollar las técnicas del grupo de renormalización en el espacio de momentos, se hace la simplificación (o la generalización) del caso discreto al caso continuo. Supondremos pues que una configuración de nuestro modelo en el espacio real vendrá dada por el *campo* $S(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Esto permite utilizar transformadas de fourier continuas para definir el campo asociado en el espacio de momentos $S(\mathbf{k})$. Así pues, nos enmarcamos dentro de la física de los medios continuos, o en otras palabras, la *física de campos*, cuyas aplicaciones abarcan la mecánica estadística de los medios continuos (mecánica estadística de campos), la física de altas energías e incluso la relatividad general, entre otros.

4.2. Procedimientos básicos

Explicamos a continuación la sistemática que seguiremos en todos los procesos a los que aplicaremos renormalización en el espacio de momentos. Los pasos a seguir constituyen la implementación práctica de la idea de Kadanoff:

- Construir la variable $S(\mathbf{x})$ y el hamiltoniano $\mathcal{H}[S(\mathbf{x})]$, con un conjunto \mathbf{K} de constantes de acoplamiento, que describan el sistema. Hacer después la transformada de Fourier para encontrar $S(\mathbf{k})$ y $\mathcal{H}[S(\mathbf{k})]$. Este primer paso dependerá del tipo específico de problema que queramos tratar, especialmente de sus simetrías, y del marco conceptual de la física en el que nos encontremos.
- Análisis de escala, para conocer la relevancia o no relevancia de los distintos términos del $\mathcal{H}[S(\mathbf{k})]$ que definen nuestro problema.
- “Construir bloques” en el espacio de momentos. El análogo a la idea de Kadanoff de construcción de bloques en el espacio real se traduce en el espacio de momentos en la integración de los momentos más grandes (obviar las distancias cortas representa obviar las altas energías, en un lenguaje más físico). Esto se realiza mediante la introducción de un “cut-off”, $b > 1$, en las

integraciones. De esta manera, tras este proceso acabamos con un hamiltoniano efectivo que tiene como variable el campo $S(\mathbf{k})$ para momentos bajos. Cabe destacar que este proceso representa la pérdida de información del sistema, y es por tanto irreversible.

- Se realiza la transformación de escala $\mathbf{k}' = b\mathbf{k}^<$, $S(\mathbf{k}^<) = cS'(\mathbf{k}')$, donde $\mathbf{k}^<$ representa los momentos bajos tras la integración de los altos. El sentido de esta transformación es que es el equivalente a eliminar variables y redefinir las nuevas variables en el espacio real.
- Se encuentran las nuevas constantes de acoplamiento en términos de las antiguas, dando la ley de recurrencia $\mathbf{K}' = f(\mathbf{K})$.
- Se buscan las ecuaciones diferenciales correspondientes a las leyes de recurrencia para las constantes de acoplamiento. Para ello se toma $b = e^l$, con $l \ll 1$, y se obtiene $\frac{d\mathbf{K}}{dl} = \mathbf{g}(\mathbf{K})$. Éstas son las ecuaciones del flujo del grupo de renormalización.
- Se calculan los puntos fijos de $\mathbf{g}(\mathbf{K})$, esto es, los puntos en que $\mathbf{g}(\mathbf{K}) = 0$. Linealizamos la matriz $\mathbf{g}(\mathbf{K})$ en un entorno de estos puntos, y a través de los autovalores de la matriz linealizada calculamos los exponentes críticos. En general, se procede al estudio detallado de las ecuaciones del grupo de renormalización.

Esta será la sistemática básica a seguir en todos los problemas. A continuación, vamos a aplicarla a diferentes modelos, en particular al modelo gaussiano (ϕ^2) y al modelo de Ginzburg-Landau-Wilson (ϕ^4).

4.3. Modelo gaussiano (ϕ^2)

El modelo gaussiano, o modelo ϕ^2 , es el más simple de los modelos posibles al que aplicar las técnicas del grupo de renormalización en el espacio de momentos, y representa habitualmente una teoría sencilla entorno a la que añadir perturbaciones para obtener modelos más complejos y con más física. Se puede demostrar que, en el marco de la mecánica estadística, este modelo representa una teoría de campo medio (clásica). En este apartado, tras una motivación y derivación del modelo, pasaremos a la renormalización del mismo.

4.3.1. Motivación y derivación

Existen infinitud de maneras de motivar el modelo que aquí consideramos, así que nosotros adoptaremos la actitud pragmática de intentar derivar este modelo a partir de los considerados en el capítulo anterior de renormalización en espacio real, a través de ciertas aproximaciones y consideraciones físicas. Consideremos inicialmente el hamiltoniano del modelo de Ising en una red, descrito por

$$\mathcal{H} = -J' \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{e}} S_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}}, \quad (4.1)$$

donde $|\mathbf{e}|^2 = a^2$, siendo a el parámetro de red (supongamos que es una red con un único parámetro) por lo que consideramos interacción a primeros vecinos únicamente, y el valor de los spins se restringe a $+1$ ó -1 . La función de partición vendrá dada por

$$\mathcal{Z}(J) = \sum_{\{S_{\mathbf{n}}\}} \exp \left(J \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{e}} S_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} \right), \quad (4.2)$$

donde $J \equiv J'\beta$, y la suma se extiende sobre todas las configuraciones posibles del sistema. Definiendo una función peso $W(\{S_{\mathbf{n}}\})$ como

$$W(\{S_{\mathbf{n}}\}) \equiv \prod_{\mathbf{n}} \delta(S_{\mathbf{n}}^2 - 1) \quad (4.3)$$

podemos reescribir la función de partición como

$$\mathcal{Z}(J) = \int \left(\prod_{\mathbf{n}} dS_{\mathbf{n}} \right) W(\{S_{\mathbf{n}}\}) \exp \left(J \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{e}} S_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} \right), \quad (4.4)$$

donde la integral representa la suma sobre todas los posibles valores de las variables $S_{\mathbf{n}}$, en la que debido a las deltas de Dirac en la función peso sólo contribuyen aquellas compuestas de spines de tipo Ising (+1 ó -1).

Podemos ahora pensar qué sucede en el caso en el que la función peso sea diferente. Por ejemplo, tomemos el caso de una gaussiana (sin preocuparnos de la normalización),

$$W(\{S_{\mathbf{n}}\}) = \exp \left(-\frac{b}{2} \sum_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}^2 \right), \quad (4.5)$$

en el que b es un cierto parámetro. Esta función peso difiere de la del modelo de Ising en una red, pero sigue teniendo en promedio la configuración $\langle \{S_{\mathbf{n}}\} \rangle = 0$ (donde $\langle \dots \rangle$ representa el promedio respecto a la función peso correspondiente), y sigue siendo simétrica respecto a $\{S_{\mathbf{n}}\} = 0$. Introduciendo esta función en la expresión para la función de partición, obtenemos

$$\mathcal{Z}(J) = \int \left(\prod_{\mathbf{n}} dS_{\mathbf{n}} \right) \exp \left(J \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{e}} S_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} - \frac{b}{2} \sum_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}^2 \right). \quad (4.6)$$

De esta última expresión podemos considerar que la física es la correspondiente al hamiltoniano efectivo dado por

$$\begin{aligned} \beta \mathcal{H}_{\text{eff}} &= -J \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{e}} S_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} + \frac{b}{2} \sum_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}^2 \\ &= \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left(\sum_{\mathbf{e}} (S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} - S_{\mathbf{n}})^2 + \left(\frac{b}{J} - 2d \right) S_{\mathbf{n}}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde para la segunda igualdad hemos supuesto que el modelo se halla definido en una red hipercúbica en d dimensiones (y por ello $\sum_{\mathbf{e}} = d$). Así pues, hemos motivado una “continuación” de la variable de campo, y hemos introducido un término de peso que vemos se puede reinterpretar como otro término cuadrático en un hamiltoniano efectivo. Ahora, pretendemos “continuar” el espacio, pasando de una red al continuo de \mathbb{R}^d . Si miramos el sistema desde muy muy lejos, los puntos discretos de la red pasan a estar tan juntos que podemos aproximar el vector discreto \mathbf{n} por la variable continua $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (más precisamente, a este proceso se le denomina “coarse graining”). En este límite podemos establecer las correspondencias

$$S_{\mathbf{n}} \rightarrow S(\mathbf{x}), \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{a^2} \sum_{\mathbf{e}} (S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}} - S_{\mathbf{n}})^2 \rightarrow |\nabla S(\mathbf{x})|^2 \quad (4.9)$$

$$\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \frac{1}{a^d} \int d^d \mathbf{x} \quad (4.10)$$

donde a es el parámetro de red. Tenemos pues que el hamiltoniano efectivo resultante es un *funcional* del campo $S(\mathbf{x})$, de valor

$$\beta \mathcal{H}_{\text{eff}}[S] = \frac{J}{2(2\pi a)^d} \int d^d \mathbf{x} \left(a^2 |\nabla S(\mathbf{x})|^2 + \left(\frac{b}{J} - 2d \right) S(\mathbf{x})^2 \right). \quad (4.11)$$

Queremos hacer notar dos cosas respecto a esta expresión. La primera, es que el término $|\nabla S(\mathbf{x})|^2$ es equivalente a un término $\nabla^2 S(\mathbf{x})$ mediante integración por partes (asumiendo que los campos se van a

cero en el infinito). En una teoría cuántica de campos, pues, identificaríamos el término en el laplaciano como una contribución cinética a la energía, y el término sin el laplaciano como un término de masas, siempre considerando un campo escalar. Dentro de este contexto, esta teoría se denomina “teoría ϕ^2 ”, dado que sólo aparecen términos cuadráticos en los campos. La segunda cosa que queremos remarcar aquí es que éste es un hamiltoniano efectivo que *depende de la temperatura*. Se puede comprobar que el hecho de que dependa de la temperatura es debido a que, en realidad, lo que hemos encontrado *no es un hamiltoniano sino una energía libre*. Nosotros no entraremos más en la discusión de este punto.

Reescalando los campos por una constante y redefiniendo los parámetros, el hamiltoniano efectivo que nos queda, y a partir del cual definimos el modelo, es

$$\mathcal{H}[S] = \int d^d \mathbf{x} \left(\frac{r(S(\mathbf{x}))^2 + |\nabla S(\mathbf{x})|^2}{2} - S(\mathbf{x})B \right), \quad (4.12)$$

donde hemos añadido un término de campo externo B . A partir de ahora obviaremos la etiqueta “efectivo”, y diremos “hamiltoniano” sin más. Podemos escribir esta misma expresión en el espacio de Fourier, integrando sobre los momentos. Definiendo la transformada de Fourier como

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \cdots \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \cdots d\mathbf{k}_d e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} S(\mathbf{k}), \quad (4.13)$$

(donde los límites de las integrales van a infinito cuando el parámetro de red va a cero). El hamiltoniano en el espacio de momentos es, pues

$$\mathcal{H}[S] = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} ((r + \mathbf{k}^2)S(\mathbf{k})S(-\mathbf{k})) - BS(\mathbf{k}=0). \quad (4.14)$$

Las expresiones (4.12) y (4.14) definen el hamiltoniano del “modelo gaussiano”. Procedemos a continuación a aplicar las técnicas del grupo de renormalización a este modelo.

4.3.2. Renormalización del modelo

Si el parámetro de red es a , las componentes de los vectores de onda deben de satisfacer la condición

$$0 < |\mathbf{k}_i| < \pi/a. \quad (4.15)$$

Definimos el factor de reducción $b > 1$, y separamos el dominio de $|\mathbf{k}_i|$ en dos regiones

$$0 < |\mathbf{k}_i^<| < \pi/(ba) < |\mathbf{k}_i^>| < \pi/a, \quad (4.16)$$

donde el superíndice $< (>)$ denota los momentos bajos (altos). Por lo tanto, $\pi/(ba)$ será el “cut-off”. Los momentos por encima de este “cut-off” serán los que vamos a eliminar, como hemos hecho notar anteriormente. Este proceso en el espacio de momentos se corresponde con el procedimiento de Kadanoff en el espacio real. Para hacerlo definiremos $S(\mathbf{k}) = S^<(\mathbf{k})$ para $0 < |\mathbf{k}_i| < \pi/(ab)$, y $S(\mathbf{k}) = S^>(\mathbf{k})$ para $\pi/(ab) < |\mathbf{k}_i| < \pi/a$.

Podemos ahora escribir el hamiltoniano con esta notación recién introducida,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[r, B, S] = & \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}^< \left(\frac{(r + (\mathbf{k}^<)^2)}{2} S^<(\mathbf{k}) S^<(-\mathbf{k}) \right) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}^> \left(\frac{(r + (\mathbf{k}^>)^2)}{2} S^>(\mathbf{k}) S^>(-\mathbf{k}) \right) \\ & - BS^<(\mathbf{k}=0), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde hemos explicitado la dependencia del hamiltoniano en los parámetros del modelo r y B . Dada la expresión anterior, la función de partición factoriza en una parte de momentos altos y una parte de

momentos bajos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(r, B) = & \int \mathcal{D}[S] e^{-\frac{\beta}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}^< \left(\left(\frac{r + (\mathbf{k}^<)^2}{2} \right) S^<(\mathbf{k}) S^<(-\mathbf{k}) - B S^<(0) \right)} \\ & \times \int \mathcal{D}[S] e^{-\frac{\beta}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}^> \left(\left(\frac{r + (\mathbf{k}^>)^2}{2} \right) S^>(\mathbf{k}) S^>(-\mathbf{k}) \right)} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

La parte de la integral funcional correspondiente a momentos altos es una integral regular que contribuye en una constante multiplicativa. Por lo tanto el efecto de la eliminación de estas variables es trivial, no aporta nada nuevo.

Vamos a ver ahora cómo se transforman los parámetros del problema mediante el cambio de escala. Para ello, definimos

$$\mathbf{k}' \equiv b\mathbf{k}^<, \quad (4.19)$$

con $|\mathbf{k}'_i| < \pi/a$ dado que $0 < |\mathbf{k}^<_i| < \pi/(ab)$, y

$$S^<(\mathbf{k}) = cS'(\mathbf{k}') . \quad (4.20)$$

Tenemos que determinar ahora el valor de c en términos de b . Hacemos este cambio en la parte del hamiltoniano que depende de la integración de momentos bajos, y obtenemos que

$$\mathcal{H}'[S'] = \frac{c^2 b^{-d}}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}' \frac{\left(r + \frac{\mathbf{k}'^2}{b^2} \right)}{2} S'(\mathbf{k}') S'(-\mathbf{k}') - c B S'(0) , \quad (4.21)$$

donde escribimos la parte de momentos bajos únicamente porque ya se ha asumido que la parte de momentos altos se integra y contribuye en una constante multiplicativa a la función de partición. Imponiendo que el nuevo hamiltoniano $\mathcal{H}'[S']$ venga definido por unas constantes r' y B' con la misma dependencia funcional que el $\mathcal{H}[S]$ inicial, obtenemos

$$r' = c^2 b^{-d} r , \quad (4.22a)$$

$$c^2 b^{-d} b^{-2} = 1 , \quad (4.22b)$$

$$B' = c B , \quad (4.22c)$$

de donde inmediatamente se desprende que $c = b^{1+\frac{d}{2}}$, y por lo tanto,

$$r' = b^2 r , \quad (4.23a)$$

$$B' = b^{(1+d/2)} B . \quad (4.23b)$$

Estas dos últimas relaciones son las leyes de recurrencia para los parámetros del problema, o lo que es lo mismo, las transformaciones del grupo de renormalización para el modelo gaussiano. A la vista de tales expresiones, es evidente que no existe punto fijo no trivial en este modelo (el único punto fijo es $r^* = 0$, $B^* = 0$). Por otra parte, los autovalores de la matriz de transformación son $\lambda_r = b^2$ y $\lambda_B = b^{(1+d/2)}$. Según la hipótesis de Kadanoff,

$$\tilde{t} = L^y t , \quad (4.24a)$$

$$\tilde{H} = L^x H , \quad (4.24b)$$

y, asumiendo una analogía entre r y t , se corresponde con nuestros resultados haciendo

$$y = 2 , \quad (4.25a)$$

$$x = 1 + \frac{d}{2} . \quad (4.25b)$$

Esto nos da los siguientes exponentes críticos,

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}\beta = \frac{d-2}{4} , \quad (4.26a)$$

$$\gamma = 1\delta = \frac{d+2}{d-2} , \quad (4.26b)$$

$$\nu = \frac{1}{2} . \quad (4.26c)$$

La dimensión del problema entra en la definición de los exponentes críticos, y observamos que para $d = 4$ obtenemos los exponentes de la teoría de campo medio.

Podemos asimismo encontrar unas leyes equivalentes a las de la ecuación (4.23), pero en forma diferencial, de manera que quede manifiesto el *flujo* en el espacio de parámetros a medida que el sistema se va renormalizando. Para tal fin, definimos l tal que

$$b = e^l . \quad (4.27)$$

Para $l \ll 1$ tenemos que $b \approx 1+l$. Por lo tanto, $r'(l) \approx (1+2l)r$, de donde se deduce que $(r'(l)-r)/l \approx 2r$, por lo que

$$\frac{dr}{dl} = 2r . \quad (4.28)$$

Por otra parte, es igualmente sencillo comprobar que procediendo de la misma manera para el parámetro B , se obtiene que

$$\frac{dB}{dl} = (1 + d/2)B . \quad (4.29)$$

Las expresiones (4.28) y (4.29) son las ecuaciones del grupo de renormalización en su forma diferencial. Buscar los puntos fijos involucra imponer que estas dos derivadas se anulen, por lo que recuperamos el resultado obtenido con anterioridad.

4.4. Modelo de Ginzburg-Landau-Wilson (ϕ^4)

El modelo de Ginzburg-Landau-Wilson, o modelo ϕ^4 , se puede considerar como un modelo gaussiano con una perturbación de orden $o(S^4)$ en los campos. El término cuártico es el que dará gran riqueza a la teoría. En una teoría cuántica de campos es el término responsable de la interacción entre pares de partículas masivas escalares de spin 0; en mecánica estadística, este término siempre se puede entender como un término posible de aparecer en el funcional hamiltoniano dadas las simetrías del problema.

4.4.1. Motivación

La motivación de este modelo procede de la misma manera que en modelo gaussiano, y por ello no vamos a repetir de nuevo todos los pasos. De nuevo, siguiendo exactamente los mismos razonamientos, podemos llegar a la expresión (4.4) para la función de partición de un cierto modelo de Ising. En el modelo gaussiano generalizamos la elección de la función peso $W(\{S_n\})$ a una gaussiana en las variables de spin (ecuación (4.5)). Ahora, vamos a generalizar un poco más esta expresión, y vamos a permitir la aparición de un término de orden cuártico en las variables de spin en la función peso,

$$W(\{S_n\}) = \exp \left(-\frac{b}{2} \sum_n S_n^2 - v \sum_n S_n^4 \right) . \quad (4.30)$$

La convergencia de esta función peso es más rápida que la del modelo gaussiano, dada la aparición del término cuártico en los campos, pero no comporta rotura de simetría. Procediendo exactamente de la misma manera que para el modelo anterior, introduciendo la nueva función peso en la función de partición, definiendo un hamiltoniano efectivo, generalizando del caso en la red al caso continuo,

y redefiniendo las constantes que aparecen, obtenemos que el funcional hamiltoniano que definirá nuestro modelo será

$$\mathcal{H}[S] = \int d^d \mathbf{x} \left(\frac{rS(\mathbf{x})^2 + |\nabla S(\mathbf{x})|^2}{2} + uS(\mathbf{x})^4 \right), \quad (4.31)$$

donde observamos que los dos primeros términos se corresponden con los del modelo gaussiano. Por otra parte, en este nuevo modelo no consideraremos el caso en el que los campos se acoplan a un campo magnético externo, como hicimos en el caso gaussiano, por simplicidad. A este modelo se le denomina también modelo ϕ^4 , debido a los términos de orden cuártico en los campos.

4.4.2. Renormalización del modelo

Este modelo es altamente menos trivial desde el punto de vista del grupo de renormalización que el modelo gaussiano, como veremos en este apartado. Por ello, vamos a hacer un análisis minucioso de éste.

Antes que nada, realizamos un análisis de escala del modelo, con el fin de identificar el comportamiento bajo transformaciones de escala de los diferentes parámetros que definen la teoría. Definimos

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'/\Lambda, \quad (4.32a)$$

$$S(\mathbf{x}') = S_0 S'(\mathbf{x}), \quad (4.32b)$$

donde Λ es un parámetro de escala, de forma que si $\Lambda \rightarrow 0$ las distancias son cada vez más macroscópicas (los intervalos en los que varían las funciones son cada vez más grandes). Sustituyendo estas expresiones en el hamiltoniano del modelo, y redefiniendo unas nuevas constantes de forma que el hamiltoniano final tenga la misma dependencia funcional en éstas que el hamiltoniano inicial,

$$r' = S_0^2 \Lambda^{-d} r, \quad (4.33a)$$

$$u' = S_0^4 \Lambda^{-d} u. \quad (4.33b)$$

De haber incluido un término en el funcional hamiltoniano del estilo $wS(\mathbf{x})^6$ (orden sexto en los campos), hubiéramos obtenido además que

$$w' = S_0^6 \Lambda^{-d} w. \quad (4.34)$$

Por otra parte, del término proveniente del gradiente al cuadrado se obtiene que $S_0^2 = \Lambda^{(d-2)}$, por lo que finalmente

$$r' = r \Lambda^{-2}, \quad (4.35a)$$

$$u' = u \Lambda^{(d-4)}, \quad (4.35b)$$

$$w' = w \Lambda^{(2d-6)}. \quad (4.35c)$$

Queremos saber cuáles son los términos relevantes del hamiltoniano en el límite termodinámico (de grandes distancias), por lo que hacemos $\Lambda \rightarrow 0$. Vemos que $r' \rightarrow \infty$, independientemente de la dimensión del sistema, por lo que ésta será siempre una variable relevante macroscópicamente, que es lo que esperamos de la temperatura. Por otra parte, $u' \rightarrow \infty$ para $d < 4$ mientras que $u' \rightarrow 0$ para $d > 4$. Vemos pues que la relevancia del parámetro correspondiente al término de orden cuártico en los campos dependerá de la dimensión, siendo $d = 4$ una dimensión crítica. Para dimensiones inferiores a la dimensión crítica el parámetro es muy relevante, mientras que para dimensiones superiores a la dimensión crítica éste no es relevante (el caso en el que la dimensión coincide con la dimensión crítica es un caso marginal). Finalmente, el comportamiento del parámetro w' es idéntico al de u' , pero con dimensión crítica igual a 3. Nosotros trabajaremos en el caso $3 < d < 4$, como veremos más adelante. Ello involucra que para nuestros cálculos, tan sólo los parámetros r y u serán relevantes, y el parámetro w tenderá a 0 a medida que vayamos renormalizando el sistema. Del mismo modo serían irrelevantes términos que multiplicasen a órdenes superiores en los campos: Encontramos así la justificación para quedarnos en el cuarto orden en el desarrollo de Landau de la energía libre cerca del punto crítico.

Antes de pasar a la renormalización explícita del modelo, vamos a definir el exponente crítico del campo mediante el siguiente procedimiento: consideremos la transformación de escala dada por

$$b\mathbf{x} = \mathbf{x}' , \quad (4.36a)$$

$$S(\mathbf{x}') = b^{-\chi} S'(\mathbf{x}) , \quad (4.36b)$$

siendo χ el exponente del campo, y supongamos el caso $u = w = 0$. Procediendo como anteriormente obtenemos que

$$r' = b^{-d-2\chi} r , \quad (4.37a)$$

$$\chi = \frac{2-d}{2} . \quad (4.37b)$$

Introducimos ahora un nuevo exponente η ,

$$\chi \equiv \frac{2-d+\eta}{2} , \quad (4.38)$$

que se denomina la *dimensión anómala*. En el modelo gaussiano vemos que $\eta = 0$, que se corresponde con el valor del exponente clásico (valor de la teoría de campo medio). En teorías más complejas que el modelo gaussiano, esta dimensión anómala no es necesariamente cero. Su importancia radica en que, de hecho, las funciones de correlación (ver apéndice 4.A.3) se pueden llegar a expresar finalmente en el punto crítico como

$$G(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{r^{(d-2-\eta)}} , \quad (4.39)$$

por lo que este exponente tiene el significado físico de una medida del decaimiento de la correlación de largo alcance en el punto crítico. Vamos a atacar al fin la renormalización del hamiltoniano del modelo de Ginzburg-Landau-Wilson, o modelo ϕ^4 , dado por la ecuación (4.31). Haciendo la transformada de Fourier de los campos, podemos obtener la expresión de este hamiltoniano en el espacio de momentos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[r, u, S] &= \mathcal{H}_0[r, S] + \mathcal{V}[u, S] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \left(\left(\frac{r + \mathbf{k}^2}{2} \right) S(\mathbf{k}) S(-\mathbf{k}) \right) \\ &+ \frac{u}{(2\pi)^{4d}} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_2 d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_4 (S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2) S(\mathbf{k}_3) S(\mathbf{k}_4) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)) . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Definimos $\mathcal{H}_0[r, S]$ como la parte del hamiltoniano que depende de términos cuadráticos en los campos (parte gaussiana) y $\mathcal{V}[u, S]$ la parte con los términos cuárticos. Igual que hicimos ya para el caso del modelo gaussiano, el hamiltoniano \mathcal{H}_0 lo podemos separar en una parte que contenga los momentos bajos ($\mathcal{H}_0^<$), y una parte que contenga los altos ($\mathcal{H}_0^>$). En definitiva, tenemos que

$$\mathcal{H}[r, u, S] = \mathcal{H}_0^<[r, S^<] + \mathcal{H}_0^>[r, S^>] + \mathcal{V}[u, S^<, S^>] = \mathcal{H}[r, u, S^<, S^>] . \quad (4.41)$$

De esta manera, al eliminar los momentos altos de la descripción del problema obtendremos un hamiltoniano del estilo $\mathcal{H}[r', u', \dots, S^<]$, donde los puntos suspensivos indican la posible aparición de nuevos términos al llevar a cabo la renormalización (como ya vimos que podía suceder, al estudiar el grupo de renormalización en el espacio real). La función de partición vendrá dada por

$$\mathcal{Z}(r, u) = \int \mathcal{D}S^< e^{-\beta \mathcal{H}_0^<}} \int \mathcal{D}S^> e^{-\beta \mathcal{H}_0^>}} e^{-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>]} . \quad (4.42)$$

La segunda integral de la expresión anterior vemos que, excepto normalización, es un promedio de la cantidad $\exp(-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>])$ con el hamiltoniano gaussiano para momentos altos, $\mathcal{H}_0^>$. Así, definimos

$$\left\langle e^{-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>]} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} \equiv \frac{\int \mathcal{D}S^> e^{-\beta \mathcal{H}_0^>}}{\int \mathcal{D}S^> e^{-\beta \mathcal{H}_0^>}}} e^{-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>]} . \quad (4.43)$$

Igualmente, imponemos que tras integrar los momentos altos del sistema la función de partición se pueda obtener a partir de un funcional hamiltoniano $\mathcal{H}'[S^<]$ de forma que

$$\mathcal{Z}(r, u) \equiv \int \mathcal{D}S^< e^{-\beta \mathcal{H}'[S^<]} , \quad (4.44)$$

donde definimos

$$\mathcal{H}'[S^<] \equiv \mathcal{H}_0^< - \frac{1}{\beta} \ln \left(\left\langle e^{-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>]} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} \right) + \frac{1}{\beta} \ln \left(\int \mathcal{D}S^> e^{-\beta \mathcal{H}_0^>} \right) , \quad (4.45)$$

notar que este proceso es muy similar a la renormalización del modelo de Ising en dos dimensiones en una red triangular, mediante el método de "blocking", que se puede encontrar en 3.3.2. El tercer término aparece debido a la correcta normalización de la distribución de probabilidad, y sólo afecta en una constante a la energía, de modo que no la consideraremos. Expandimos ahora el promedio de $\mathcal{V}[S^<, S^>]$ en cumulantes del estilo

$$\left\langle e^{-\beta \mathcal{V}[S^<, S^>]} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} = e^{-\beta \left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} + \frac{\beta^2}{2} \left(\left\langle \mathcal{V}^2[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} - \left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2 \right) + \dots} . \quad (4.46)$$

Vemos que una expansión en cumulantes será tanto mejor cuanto más alta sea la temperatura de trabajo (considerando mecánica estadística). Así, a altas temperaturas pocos cumulantes hacen falta para obtener buenos resultados. Con el objetivo de simplificar la notación, de ahora en adelante nos olvidaremos del factor β , dado que la renormalización del modelo no depende de éste. Supondremos que $\beta = 1$, o mejor, que dicho factor se ha absorbido ya en el hamiltoniano a través de las constantes que definen el modelo. Retomando la expresión para el hamiltoniano $\mathcal{H}'[S^<]$, tenemos que

$$\mathcal{H}'[S^<] = \mathcal{H}_0^< + \left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} - \frac{1}{2} \left(\left\langle \mathcal{V}^2[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} - \left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2 \right) + \dots . \quad (4.47)$$

Para el primero de los cumulantes, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} &= \int \mathcal{D}S^> e^{-\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \left(\frac{r + \mathbf{k}^2}{2} \right) S(\mathbf{k}) S(-\mathbf{k})} \\ &\times \frac{u}{(2\pi)^{4d}} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_2 d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_4 S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2) S(\mathbf{k}_3) S(\mathbf{k}_4) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para el cálculo de la expresión anterior, haremos uso del correlador de dos puntos en el espacio de momentos para el modelo gaussiano, o propagador "libre" (ver apéndice 4.A.3)

$$\left\langle S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2) \right\rangle = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{1}{r + \mathbf{k}_2^2} , \quad (4.49)$$

y también haremos uso de una descripción diagramática como sigue: por definición, el primer cummulante $\left\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>}$ lo representaremos como el diagrama de cuatro patas, figura 4.1, donde los

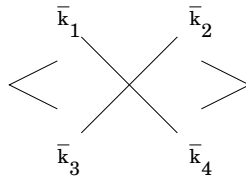


Figura 4.1: Diagrama de cuatro patas.

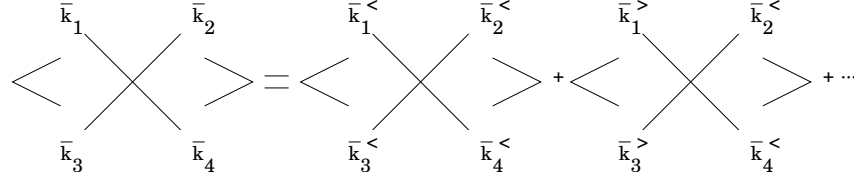


Figura 4.2: Descomposición en momentos altos y bajos.

momentos \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 y \mathbf{k}_4 representan los momentos de cada pata. Separando la integral de los momentos de la ecuación (4.48) en integración de momentos altos y bajos respectivamente, tenemos que el diagrama anterior lo podemos escribir como una suma sobre todas las posibles combinaciones de momentos altos y bajos en las patas, figura 4.2.

Recordemos ahora que al hacer el promedio representado por los paréntesis $\langle \dots \rangle$ estamos integrando sobre los campos a momentos altos $S^>$ (ecuación (4.48)), por lo que a los diagramas que no tengan patas con momentos altos no les afectará la integración. Por otra parte, cualquier diagrama que tenga un número impar de patas con momentos altos involucrará una integral funcional de integrando impar, por lo que su valor será directamente nulo por simetría. También sucede que el diagrama que tiene las cuatro patas con momentos altos contribuye en una constante (puesto que los cuatro campos irán integrados) al funcional hamiltoniano $\mathcal{H}'[S^<]$, por lo que no afectará a los términos de interacción. Por lo tanto, a la hora de renormalizar los parámetros de la teoría, en la aproximación al primer cumulante sólo se han de tener en cuenta los diagramas con dos patas a momentos altos y dos patas a momentos bajos, y el diagrama con las 4 patas a momentos bajos. Éste último término dará el primer orden de la constante de interacción a cuatro campos, dado que quedarán los cuatro campos sin integrar, y el correspondiente promedio será la suma de todas las probabilidades, que al estar bien normalizadas será 1, dando por lo tanto la constante de interacción u “desnuda” (en terminología inglesa, “bare”).

Es fácil ver que existen un total de 6 diagramas con dos patas a momentos altos y otras dos a momentos bajos. Estos diagramas darán aportaciones que al final se escribirán como integrales a momentos bajos (los no integrados) de términos cuadráticos en los campos (porque 2 de los 4 campos sobrevivirán a la integral funcional al ir evaluados a bajos momentos), por lo que, al sumarse a $\mathcal{H}_0^<$ de acuerdo con la ecuación (4.47), contribuirán al término de dos campos de $\mathcal{H}'[S^<]$, renormalizando por lo tanto la constante de acoplamiento r . Calculando estas contribuciones obtenemos que la suma de estos 6 diagramas es

$$\frac{6u}{(2\pi)^{4d}} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_2 d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_4 \left(S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_4) \langle S^>(\mathbf{k}_1) S^>(\mathbf{k}_2) \rangle (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \right), \quad (4.50)$$

donde, tras sustituir el correlador a dos puntos de la ecuación (4.49), y realizar la integral sobre el segundo momento, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{6u}{(2\pi)^{3d}} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_4 \left(S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_4) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \frac{1}{r + \mathbf{k}_1^2} \right) \\ &= \left(\frac{6u}{(2\pi)^{2d}} \int d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_4 (S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_4) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)) \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}_1 \frac{1}{r + \mathbf{k}_1^2} \right) \\ &= 12u I_1 \frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}_3 S^<(\mathbf{k}_3) S^<(-\mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde hemos definido

$$I_1 \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}_1 \frac{1}{r + \mathbf{k}_1^2}. \quad (4.52)$$

Confirmamos pues nuestra afirmación de que este es un término que renormaliza la constante de acoplamiento r al redefinir nuestro nuevo hamiltoniano. Obtenemos que con el cálculo al primer cumulante,

$$r' = r + 12u I_1. \quad (4.53)$$

Antes de estudiar el comportamiento analítico de la integral I_1 , consideramos el cálculo al segundo cumulante. Hemos de calcular el término $\langle \mathcal{V}^2[S^<, S^<] \rangle_{\mathcal{H}_0^>} - \langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2$, que en notación diagramática escribiremos como en la figura 4.3.

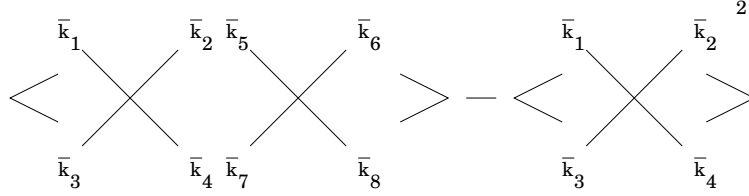


Figura 4.3: Expresión diagramática de $\langle \mathcal{V}^2[S^<, S^<] \rangle_{\mathcal{H}_0^>} - \langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2$.

Para calcular esta contribución, estudiamos inicialmente el primero de los dos sumandos de este diagrama. Notamos que, de acuerdo con el desarrollo en cumulantes, aparecerán aquí promedios sobre términos a 8 campos. Por los mismos argumentos que acabamos de hacer para el caso del primer cumulante, este término se puede desarrollar como una suma sobre todas las posibles combinaciones de momentos altos y bajos en las 8 patas. Las mismas conclusiones de entonces son ahora también mayoritariamente válidas: el término en el que las 8 patas del diagrama vayan con momentos altos contribuye en una constante a la energía del estado fundamental, y los términos con un número impar de patas se anularán por simetría. Quedarán pues los diagramas con un número par de patas a momentos altos y un número par de patas a momentos bajos. Para ver más detalladamente el proceso de cálculo que utilizaremos, vamos a calcular explícitamente el diagrama de la figura 4.4.

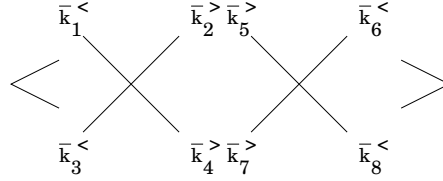


Figura 4.4: Diagrama a ocho patas que vamos a calcular

Este diagrama representa a la integral

$$\frac{u^2}{(2\pi)^{6d}} \int d^d \mathbf{k}_1 \cdots d^d \mathbf{k}_8 S^<(\mathbf{k}_1) S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_6) S^<(\mathbf{k}_8) \times \langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_4) S^>(\mathbf{k}_5) S^>(\mathbf{k}_7) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6 + \mathbf{k}_7 + \mathbf{k}_8). \quad (4.54)$$

Vemos pues que para calcular esta expresión necesitamos conocer la función de correlación a cuatro puntos del hamiltoniano gaussiano (hamiltoniano “libre”). Esto lo podemos calcular fácilmente mediante el uso del Teorema de Wick (ver apéndice 4.A.3). Esta función de correlación a cuatro puntos, se puede descomponer en funciones de correlación a dos puntos mediante el uso del susodicho teorema, obteniendo

$$\begin{aligned} \langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_4) S^>(\mathbf{k}_5) S^>(\mathbf{k}_7) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} &= \langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_4) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \langle S^>(\mathbf{k}_5) S^>(\mathbf{k}_7) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \\ &+ \langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_5) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \langle S^>(\mathbf{k}_4) S^>(\mathbf{k}_7) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \\ &+ \langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_7) \rangle_{\mathcal{H}_0^>} \langle S^>(\mathbf{k}_4) S^>(\mathbf{k}_5) \rangle_{\mathcal{H}_0^>}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

De acuerdo con este resultado, en base al Teorema de Wick, vamos a introducir una notación diagramática para los términos de la derecha de la expresión anterior. Por cada término, dibujaremos

un diagrama como el último dibujado, pero conectando las patas que van juntas en cada promedio. Así diagramáticamente la ecuación anterior se expresa como en la figura 4.5.

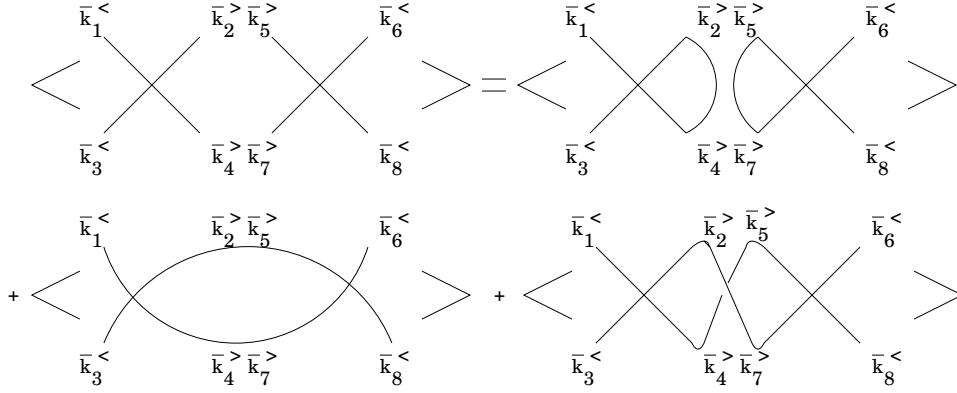


Figura 4.5: Representación diagramática de la ecuación 4.55.

Observamos ahora que el primer término en la suma de la ecuación (4.55) se cancela exactamente con la contribución del término $\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2$ correspondiente al diagrama de la figura 4.6.

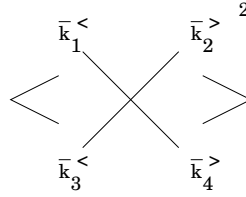


Figura 4.6: Diagrama correspondiente a $\langle \mathcal{V}[S^<, S^>] \rangle_{\mathcal{H}_0^>}^2$.

Diagramáticamente vemos que el término que se cancela corresponde a un diagrama desconectado. Esto no es una casualidad: se puede demostrar que *todos los diagramas desconectados cancelan exactamente al considerar toda la expansión entera en cumulantes*. Éste es un teorema de mucha generalidad, y su demostración se basa en argumentos de extensividad de la energía. Nosotros nos restringimos simplemente a utilizarlo, puesto que su demostración va más allá de nuestras pretensiones en este apartado. Así pues, tan sólo nos hemos de preocupar de los diagramas conectados.

Considerando sólo este tipo de diagramas, vemos que tendremos contribuciones como las mostradas en el diagrama 4.7.

El primero de los diagramas está completamente conectado (todos los momentos son altos) y por tanto sólo contribuye en una constante al hamiltoniano. El segundo tiene dos patas desconectadas, por lo que contribuirá a la renormalización de r (con un término de orden u^2), al quedar dos campos libres. Lo despreciaremos por ser de orden superior en u . El tercero contribuirá a la renormalización de u al quedar cuatro campos libres, y el cuarto contribuye a la renormalización del hipotético término de orden 6 en los campos (vemos que aparecen interacciones, tal y como sucedía al renormalizar en el espacio real en algunos casos).

Nosotros ahora queremos calcular la renormalización del parámetro u . Para ello, consideramos los diagramas conectados con cuatro patas libres. Todos ellos se pueden agrupar en dos tipos, mostrados en la figura 4.8. Es fácil calcular que existen 72 diagramas del primer estilo que se reducen a 36 por simetría, mientras que se puede comprobar que existen 96 diagramas del segundo estilo. En cualquier caso, los diagramas del estilo del segundo se puede demostrar (escribiendo explícitamente la integral) que son exactamente igual a cero, dado que en algún momento del cálculo aparece por el camino una $\delta(\mathbf{k}^> + \mathbf{k}^<)$, cuya contribución es nula. Así, nos restringimos al cálculo de la contribución de los diagramas del primer tipo.

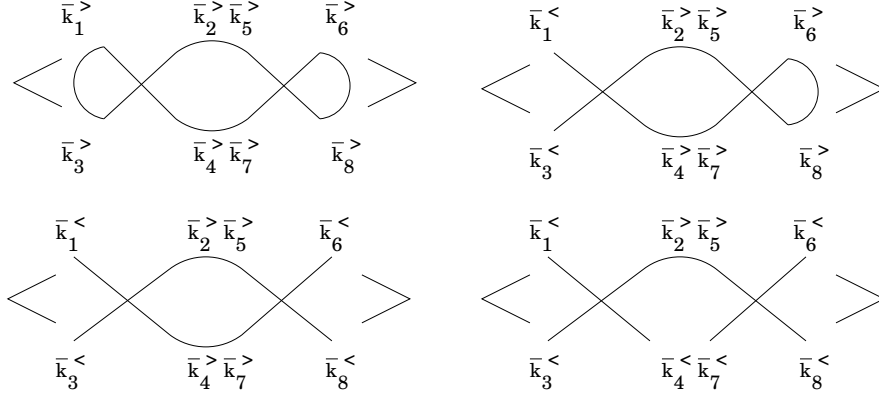


Figura 4.7: Contribuciones de los diagramas conectados.

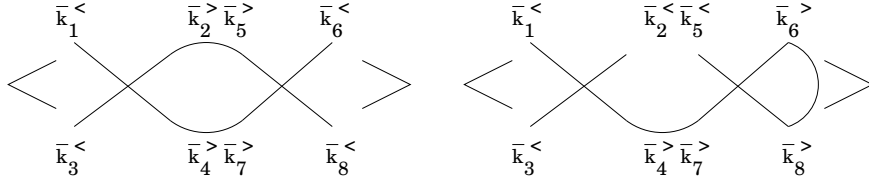


Figura 4.8: Tipos de diagramas conectados con cuatro patas libres.

La suma de las 36 contribuciones equivalentes es

$$\begin{aligned} & \frac{36u^2}{(2\pi)^{6d}} \int d^d \mathbf{k}_1 \cdots d^d \mathbf{k}_8 \left(S^<(\mathbf{k}_1) S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_6) S^<(\mathbf{k}_8) \right) \\ & \times \left\langle S^>(\mathbf{k}_2) S^>(\mathbf{k}_5) \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} \left\langle S^>(\mathbf{k}_4) S^>(\mathbf{k}_7) \right\rangle_{\mathcal{H}_0^>} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6 + \mathbf{k}_7 + \mathbf{k}_8), \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde los promedios los sabemos calcular al ser correladores a dos puntos del modelo gaussiano. Introduciendo estos promedios es sencillo hacer la integral gracias a las deltas de Dirac, y obtenemos

$$\frac{36u^2}{(2\pi)^{4d}} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_3 d^d \mathbf{k}_6 d^d \mathbf{k}_8 S^<(\mathbf{k}_1) S^<(\mathbf{k}_3) S^<(\mathbf{k}_6) S^<(\mathbf{k}_8) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1^< + \mathbf{k}_3^< + \mathbf{k}_6^< + \mathbf{k}_8^<) \cdot I_2, \quad (4.57)$$

donde hemos definido la integral I_2 como

$$I_2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k}_2^> \left(\frac{1}{r + \mathbf{k}_2^2} \right) \left(\frac{1}{r + (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_6^< - \mathbf{k}_8^<)^2} \right). \quad (4.58)$$

Al pertenecer \mathbf{k}_6 y \mathbf{k}_8 al dominio de momentos pequeños, y \mathbf{k}_2 al de los grandes, podemos aproximar $|\mathbf{k}_6| = |\mathbf{k}_8| = 0$. Así pues, obtenemos que la renormalización del acoplamiento u calculando hasta el segundo cumulante es

$$u' = u - 36u^2 I_2. \quad (4.59)$$

Una vez hechos estos cálculos, procedemos a hacer la transformación de escala

$$\mathbf{k}' = b\mathbf{k}^<, \quad (4.60a)$$

$$S^<(\mathbf{k}) = cS'(\mathbf{k}'). \quad (4.60b)$$

Es sencillo obtener la relación $c = b^{(d+2)/2}$, y de ahí derivar que finalmente las ecuaciones (4.53) y (4.59) se reducen, después del cambio de escala, a

$$r' = b^2(r + 12uI_1), \quad (4.61a)$$

$$u' = b^{(4-d)}(u - 36u^2 I_2), \quad (4.61b)$$

que serán las leyes de recurrencia para los parámetros del problema, calculadas a primer orden no trivial.

Para proseguir con la sistemática del grupo de renormalización, primero hemos de estudiar el comportamiento analítico de las integrales I_1 e I_2 , el cual hemos hasta el momento obviado. Recordemos que en estas dos integrales el dominio de integración es sobre los momentos altos. En I_2 , por pertenecer \mathbf{k}_6 y \mathbf{k}_8 al dominio de momentos pequeños, y \mathbf{k}_2 al de los grandes, podemos aproximar $|\mathbf{k}_6| = |\mathbf{k}_8| = 0$. Así, nos centraremos en el estudio de la integral general

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \frac{1}{(r + \mathbf{k}^2)^n} . \quad (4.62)$$

Los límites de esta integral varían en el dominio $\pi/(ab) < |\mathbf{k}_i| < \pi/a$, luego se hace sobre una cáscara, y por ello se pueden hacer ciertas aproximaciones. En primer lugar, sin pérdida de generalidad asumimos que $\pi/a = 1$, de forma que los límites de integración quedan entre $1/b < |\mathbf{k}_i| < 1$ (se puede argumentar basándonos en que los “observables”, al final del día, no pueden depender del “cut-off”). Por lo tanto, tenemos la integral

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{1/b}^1 d^d \mathbf{k} \frac{1}{(r + \mathbf{k}^2)^n} . \quad (4.63)$$

Dado que b es ligeramente mayor que 1, estamos integrando sobre una capa en el dominio de momentos altos, y podemos aproximar en el integrando $k \approx 1$, con lo que obtenemos

$$I_n \approx \frac{1}{(2\pi)^d (r+1)^n} \int_{1/b}^1 d^d \mathbf{k} , \quad (4.64)$$

donde la última integral la podemos hacer en coordenadas esféricas generalizadas, obteniendo

$$I_n \approx \frac{1}{(2\pi)^d (r+1)^n} \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{(d/2 - 1)!} d(1 - b^{-d}) , \quad (4.65)$$

y definiendo $b = e^l$, tenemos que para l pequeño $1 - e^{ld} \approx ld$, por lo que

$$I_n \approx \frac{Al}{12(1+r)^n} , \quad (4.66)$$

siendo A una cierta constante que engloba al resto de constantes, que son calculadas en $d = 4$.

Expandiendo ahora las expresiones para r' y u' de las ecuaciones (4.61) para l pequeño, y expandiendo también entorno a $\varepsilon = 4 - d$ (suponemos pequeño), obtenemos que

$$r' = r + 2lr + \frac{uAl}{1+r} , \quad (4.67a)$$

$$u' = u + \varepsilon lu - \frac{3u^2 Al}{(1+r)^2} , \quad (4.67b)$$

y tomando el límite $l \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{dr}{dl} = 2r + \frac{uA}{1+r} , \quad (4.68a)$$

$$\frac{du}{dl} = \varepsilon u - \frac{3u^2 A}{(1+r)^2} , \quad (4.68b)$$

que son las ecuaciones finales y definitivas del grupo de renormalización en forma diferencial para este modelo a primer orden en ε para los parámetros r y u .

A partir de estas expresiones podemos calcular los puntos fijos. Además del punto fijo gaussiano, en el que $u^* = r^* = 0$, se obtiene otro no trivial,

$$u^* = \frac{\varepsilon}{3A} + o(\varepsilon^2) , \quad (4.69a)$$

$$r^* = \frac{-\varepsilon}{6} + o(\varepsilon^2) , \quad (4.69b)$$

que, como vemos, depende de la dimensionalidad. Podemos linealizar la matriz $\mathbf{g}(\mathbf{K})$ en el entorno del punto fijo, quedándonos a primer orden en ε ,

$$\mathbf{g}(\mathbf{K})_L = \begin{pmatrix} 2 - Au^* & A(1 - r^*) \\ 0 & \varepsilon - 6u^*A \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = 2 - Au^* , \quad (4.71a)$$

$$\lambda_2 = \varepsilon - 6u^*A , \quad (4.71b)$$

Así, para el punto fijo gaussiano encontramos

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \varepsilon \end{matrix} \right\} \longrightarrow \nu = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2} , \quad (4.72)$$

y para el punto fijo no trivial,

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = 2 - \frac{\varepsilon}{3} + o(\varepsilon^2) \\ \lambda_2 = -\varepsilon + o(\varepsilon^2) \end{matrix} \right\} \longrightarrow \nu = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + o(\varepsilon^2) . \quad (4.73)$$

Vemos cómo el punto fijo gaussiano nos da el exponente correspondiente a una teoría de campo medio, y el punto fijo no trivial nos da una corrección a este resultado. La estabilidad de los puntos fijos depende de la dimensionalidad del sistema. Para $d \geq 4$, tan sólo el punto fijo gaussiano es estable, como se ve en la figura 4.9.

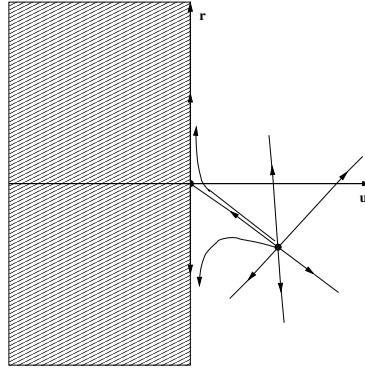


Figura 4.9: Representación en el espacio de parámetros de las transformaciones del grupo de renormalización para $d > 4$. Se observa una superficie crítica (línea en este caso), en la que cualquier (r, u) es llevado hasta el punto crítico gaussiano.

Los exponentes críticos son los correspondientes a una teoría de campo medio son

$$\nu = \frac{1}{2} , \quad \alpha = 0 , \quad \beta = \frac{1}{2} , \quad (4.74a)$$

$$\delta = 3 , \quad \gamma = 1 , \quad \eta = 0 , \quad (4.74b)$$

Para $d < 4$, el punto fijo estable es el no trivial, tal y como vemos en la figura 4.10. Con lo cual los exponentes críticos a orden ε son

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} , \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{6} , \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{6} , \quad (4.75a)$$

$$\delta = 3 + \varepsilon , \quad \gamma = 1 + \frac{\varepsilon}{6} , \quad \eta = 0 . \quad (4.75b)$$

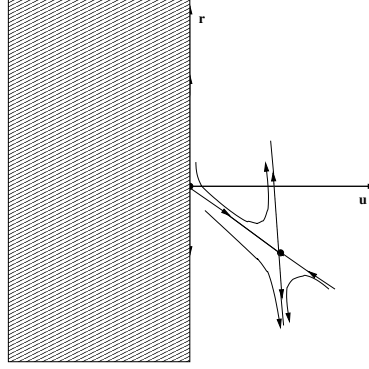


Figura 4.10: Representación de las transformaciones del grupo de renormalización para $d = 4 - \varepsilon, \varepsilon > 0$. Los puntos sobre la línea crítica son llevados hacia el punto fijo no gaussiano.

Hasta aquí, por haber trabajado con modelos en los que la variable del hamiltoniano tiene tan sólo una componente, $S(\mathbf{x})$, todos los resultados que hemos encontrado han dependido tan sólo de la dimensión del sistema. En general, trabajando con un campo vectorial de n componentes, los exponentes críticos dependerán de la dimensión y de n . En este caso las ecuaciones del grupo de renormalización en forma diferencial son [Fis83]

$$\frac{dr}{dl} = (2 - 4(n+2)K_2u)r + 8(n+2)K_1u, \quad (4.76a)$$

$$\frac{du}{dl} = u(\varepsilon - 4(n+8)K_2u), \quad (4.76b)$$

donde K_1 y K_2 son unas ciertas constantes que provienen de las integrales en k . Podemos ver que en este modelo también tenemos dos puntos fijos: el gaussiano, $u^* = r^* = 0$, y el no trivial,

$$u^* = \frac{\varepsilon}{4(n+8)K_2}, \quad (4.77a)$$

$$r^* = -\frac{K_1}{K_2} \left(\frac{n+2}{n+8} \right) \varepsilon. \quad (4.77b)$$

Siguiendo con el procedimiento anterior, linealizamos la matriz $\mathbf{g}(\mathbf{K})$ alrededor del punto fijo, a orden ε , y buscamos sus valores propios

$$\mathbf{g}(\mathbf{K})_L = \begin{pmatrix} 2 - 4(n+2)K_2u^* & 8(n+2)K_1 \\ 0 & \varepsilon - 4(n+8)K_2u^* \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

Nada cambia alrededor del punto fijo gaussiano, encontramos los valores correspondientes a una teoría de campo medio. Alrededor del nuevo punto fijo no trivial los valores propios son

$$\lambda_1 = 2 - \frac{n+2}{n+8}\varepsilon + o(\varepsilon^2), \quad (4.79a)$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon + o(\varepsilon^2). \quad (4.79b)$$

A partir de aquí podemos encontrar los exponentes críticos. Para $d \geq 4$ el punto fijo gaussiano nos da los exponentes de campo medio, y para $d < 4$ el punto fijo no trivial nos da los siguientes exponentes críticos, a orden ε ,

$$\alpha = \frac{(4-n)\varepsilon}{2(n+8)}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2(n+8)}, \quad \gamma = 1 + \frac{(n+2)\varepsilon}{2(n+8)}, \quad (4.80a)$$

$$\delta = 3 + \varepsilon, \quad \eta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\varepsilon. \quad (4.80b)$$

Ahora podemos ver la gran aportación de Wilson: los parámetros relevantes para determinar las propiedades del punto fijo sólo dependen de d y n . La idea de universalidad se muestra así en todo su esplendor.

Apéndice 4.A Aspectos matemáticos

En este apéndice se proporcionan algunas relaciones que son de utilidad a lo largo de este capítulo de estudio de las técnicas del grupo de renormalización en el espacio de momentos, abarcando desde transformadas de Fourier hasta algunas relaciones de cálculo funcional. Finalmente, enunciaremos el Teorema de Wick.

4.A.1 Transformadas de Fourier

El convenio que seguimos para las transformadas de Fourier en este capítulo es el siguiente

$$S(\mathbf{k}) = \int d^d \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} S(\mathbf{x}) , \quad (4.81)$$

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} S(\mathbf{x}) . \quad (4.82)$$

Igualmente, son de utilidad las relaciones

$$\int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = (2\pi)^d \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') , \quad (4.83)$$

$$\int d^d \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') , \quad (4.84)$$

que son resoluciones de la identidad en un espacio de funciones.

4.A.2 Relación entre expresiones en la red y en el continuo

Algunas expresiones que relacionan expresiones en el discreto (en la red) y en el continuo fueron ya puestas de manifiesto por las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10). Aquí proporcionamos algunas correspondencias adicionales que pueden ser de utilidad, donde a es el parámetro de red,

$$\sum_{\mathbf{n}} a^d \rightarrow \int d^d \mathbf{x} , \quad (4.85)$$

$$\frac{1}{a^d} \frac{\partial}{\partial S_{\mathbf{n}}} \rightarrow \frac{\delta}{\delta S(\mathbf{x})} , \quad (4.86)$$

$$\frac{\delta_{\mathbf{n}\mathbf{m}}}{a^d} \rightarrow \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{y}) , \quad (4.87)$$

$$\sum_{\mathbf{n}} a^d F(S_{\mathbf{n}}) \rightarrow \int d^d \mathbf{x} F(S(\mathbf{x})) . \quad (4.88)$$

4.A.3 Funciones de correlación y estructura: Teorema de Wick

Definimos la función de correlación de dos puntos en el espacio real como

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv \langle S(\mathbf{r}_1) S(\mathbf{r}_2) \rangle , \quad (4.89)$$

donde ésta sólo depende de la distancia entre los dos puntos si el modelo es homogéneo. Mediante la transformada de Fourier, definimos la función de correlación en el espacio de momentos como

$$\langle S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2) \rangle = \int d^d \mathbf{r}_1 \int d^d \mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) . \quad (4.90)$$

Mediante el cambio de variables $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1$ en la expresión anterior, obtenemos

$$\langle S(\mathbf{k}_1)S(\mathbf{k}_2) \rangle = \int d^d \mathbf{r}_1 e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}_1} \int d^d \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} G(\mathbf{r}) . \quad (4.91)$$

Definimos ahora la función de estructura como

$$\tilde{S}(\mathbf{k}_2) \equiv \int d^d \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} G(\mathbf{r}) , \quad (4.92)$$

por lo que el correlador de dos puntos en el espacio de momentos se puede expresar como

$$\langle S(\mathbf{k}_1)S(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \tilde{S}(\mathbf{k}_2) . \quad (4.93)$$

Para el modelo gaussiano tenemos que

$$\langle S(\mathbf{k}_1)S(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}S e^{-\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \left(\left(\frac{r + \mathbf{k}^2}{2} \right) S(\mathbf{k}) S(-\mathbf{k}) \right)} S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2) , \quad (4.94)$$

y a partir de esta expresión se puede comprobar mediante el Teorema de Wick (ver más abajo) que, para este modelo,

$$\langle S(\mathbf{k}_1)S(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{1}{r + \mathbf{k}_2^2} , \quad (4.95)$$

por lo tanto, para la función de estructura gaussiana encontramos la expresión

$$\tilde{S}(\mathbf{k}_2) = \frac{1}{r + \mathbf{k}_2^2} . \quad (4.96)$$

Vamos a continuación a enunciar y demostrar el Teorema de Wick: comencemos por una distribución gaussiana

$$P[S] = \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_2 S(\mathbf{k}_1) A^{-1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S(\mathbf{k}_2) \right) , \quad (4.97)$$

donde el inverso de $A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ es tal que

$$\int d^d \mathbf{k}_2 A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) A^{-1}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) . \quad (4.98)$$

Definamos ahora el funcional generador, $\mathcal{Z}(J)$ (no confundir con la función de partición), como

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}S P[S] e^{\int d^d \mathbf{k} (J(\mathbf{k}) S(\mathbf{k}))} . \quad (4.99)$$

De la expresión (4.99) es fácil comprobar que

$$\langle S(\mathbf{k}_1) \cdots S(\mathbf{k}_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \left(\frac{\delta^n}{\delta J(\mathbf{k}_1) \cdots \delta J(\mathbf{k}_n)} \mathcal{Z}[J] \right)_{J=0} , \quad (4.100)$$

donde el promedio es sobre la distribución gaussiana de la ecuación (4.97). Para calcular estas derivadas, haremos uso de la relación

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{Z}[0] e^{\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{k}_1 d^d \mathbf{k}_2 (J(\mathbf{k}_1) A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) J(\mathbf{k}_2))} , \quad (4.101)$$

que es sencilla de demostrar a través de una traslación apropiada en los campos. Expandiendo la exponencial anterior en serie de potencias, vemos que en la expresión (4.100) sólo sobrevivirá un único término de la serie, aquél de orden n en el campos J : los órdenes menores los cancelarán las derivadas funcionales, y los superiores se anularán al hacer tender $J \rightarrow 0$. Se ve también que ello implica que los correladores impares se anulen, y que sólo sobrevivan los pares.

Para el correlador a dos puntos obtenemos

$$\langle S(\mathbf{k}_1)S(\mathbf{k}_2) \rangle = A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) , \quad (4.102)$$

que para el modelo gaussiano considerado aquí reproduce la expresión de la ecuación (4.95). Consecuentemente, para el resto de correladores pares, esta expresión implica que su valor sea el producto de los propagadores a dos puntos sumado sobre todas las permutaciones posibles de éstos. Éste es el Teorema de Wick: *todos los correladores pares se pueden calcular como sumas sobre todas las permutaciones posibles de los productos de correladores a dos puntos.*

Un ejemplo de aplicación de este teorema es la ecuación (4.55), en la que se descompone el correlador de cuatro puntos en productos de correladores de dos puntos.

Capítulo 5

Grupo de renormalización en percolación

El objeto de este capítulo es introducir de forma muy breve la fenomenología y el formalismo percolativo estudiados mediante las técnicas de Grupo de Renormalización (GR).

El interés de aplicar el grupo de renormalización a estos sistemas radica en que estos no vienen descritos por un hamiltoniano, y ello nos puede ilustrar sobre la potencialidad de grupo de renormalización para atacar sistemas que exhiben criticalidad pero usan una formalización teórica diferente. Veremos además que se aplica el grupo de renormalización en espacio real.

5.1. Introducción

La teoría de la percolación constituye todo un formalismo matemático capaz de modelizar un amplia gama de situaciones tales como la propagación del fuego por un bosque o de un virus sobre una población. Toma su nombre del percolador de las cafeteras y a su vez de la voz latina *percolāre* (filtrar, colar). No obstante, su interés no radica sólo en este tipo de naturalezas expansivas o de crecimiento sino que permite una representación equivalente de sistemas termodinámicos permitiendo una visión geométrica de estos. Esta correspondencia entre geometría y termodinámica convierte la teoría de la percolación en objeto de gran interés para la física estadística, ya que el tratamiento de modelos como el Ising o su generalización (Potts) encuentran una visión alternativa en esta disciplina.

El objeto de este capítulo es introducir de forma muy breve la fenomenología y el formalismo percolativo estudiados mediante las técnicas de Grupo de Renormalización (GR).

El interés de aplicar el grupo de renormalización a estos sistemas radica en que estos no vienen descritos por un hamiltoniano, y ello nos puede ilustrar sobre la potencialidad de grupo de renormalización para atacar sistemas que exhiben criticalidad pero usan una formalización teórica diferente.

5.2. Definiciones

El estudio de la percolación, en general, está enfocado sobre un sistema geométrico sometido a unas reglas, con el objetivo de ver si presenta propiedades críticas (scaling, universalidad, etc). Dicho sistema está formado por una red compuesta de nodos (posiciones) y conexiones o interacciones entre nodos, sobre la que se pueden aplicar diversos tipos de renormalización. En primer lugar hablamos de *site percolation* si consideramos los nodos de la red como elementos principales. Cada uno de ellos puede estar ocupado o vacío según una probabilidad p o $1 - p$, respectivamente.

Diremos que dos nodos están conectados si son contiguos y están ocupados. Otra manera de formalizar el sistema es la *bond percolation*, en la que son las conexiones (bonds, links) entre nodos las que son susceptibles de aparecer y conectar dos nodos consecutivos según p y unas reglas de conexión. Obviamente, $p = 1$ corresponde al estado en el que todos los nodos están ocupados (*site*) o

interconectados (*bond*); y $p=0$ corresponde a la situación de red totalmente vacía o inconexa. Por lo tanto el problema de la percolación se expresa como *el estudio de propiedades del sistema en función de p* .

Por supuesto, p puede depender de otros parámetros, algunos de ellos controlables experimentalmente y utilizados para observar cómo cambian las propiedades en función de p . Lo primero que se descubre al hacerlo es que estos sistemas presentan un comportamiento crítico, es decir, que existen valores concretos de p en los que unas propiedades cambian de manera singular. Este punto crítico, p_c , depende del sistema concreto y por tanto no es universal. Lo importante es que existen cantidades bien definidas que, cerca de la zona crítica, se comportan según potencias de la diferencia entre p y p_c .

Ejemplos de estas son el número de clústers (que luego definiremos),

$$G(p) = \sum_s n_s(p) \sim |p - p_c|^{2-\alpha} , \quad (5.1)$$

donde n_s es el número de clústers de tamaño s . La probabilidad $P(p)$ de que un nodo pertenezca a un clúster infinito actúa como parámetro de orden,

$$P(p) \sim (p - p_c)^\beta , \quad p > p_c , \quad (5.2)$$

y por lo tanto $P(p) = 0$ para $p < p_c$. Otra cantidad es el tamaño medio de clústers finitos,

$$S(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma} , \quad (5.3)$$

y también la función de correlación,

$$C(p, r) \sim \frac{e^{\frac{-r}{\xi(p)}}}{r^{d-2+\eta}} . \quad (5.4)$$

que define una longitud de correlación $\xi(p)$ que igualmente exhibe comportamiento crítico,

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu} . \quad (5.5)$$

En este capítulo trataremos sólo con esta última cantidad, ya que podremos calcular fácilmente el exponente crítico ν .

Igual que los capítulos anteriores, se pueden cumplir unas leyes de scaling que relacionan los exponentes críticos,

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \frac{1}{\beta + \gamma} = D . \quad (5.6)$$

donde D es la dimensión fractal del sistema. Así, dados dos exponentes podremos calcular el resto.

A continuación presentamos a un caso unidimensional sencillo realizado en site percolation que —siendo resoluble exactamente por grupo de renormalización— permitirá entender de manera simple los elementos del mismo. Posteriormente, presentaremos un caso de bond percolation en dos dimensiones que se ha de resolver de forma aproximada.

5.3. Percolación en una dimensión (site percolation)

Considérese una cadena unidimensional infinita con nodos equiespaciados que pueden estar ocupados o vacíos. Representaremos estos como círculos grises y aquellos como negros. Una configuración posible es la de la figura 5.1. Cada vez que hay un grupo de nodos ocupados consecutivos decimos que forman un *clúster* (agrupación). Un nodo ocupado aislado forma el clúster mínimo. (Ver figura 5.2)

De la definición de p se deduce que a cada círculo oscuro (ocupado) se le asigna una probabilidad p y a cada círculo vacío $1 - p$, tal y como podemos ver en la figura 5.3.

Con este modelo es muy sencillo entender el significado de la percolación. Decimos que *un sistema percola cuando una información cualquiera puede atravesar todo el sistema*. Esta información puede ser corriente que circula por bolas conductoras, agua filtrándose a través del café, etc. En este caso



Figura 5.1: Cadena unidimensional.

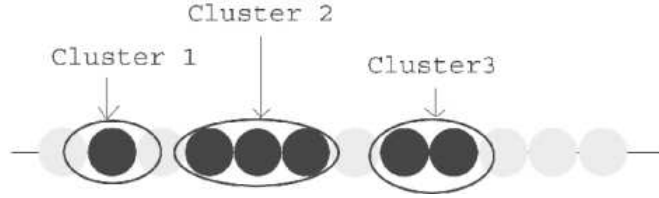


Figura 5.2: Clústers.

dicha información sólo puede viajar por los nodos ocupados y es evidente que sólo se podrá transmitir por toda la cadena cuando no haya ninguno vacío, es decir, para $p = 1$. Basta un solo nodo desocupado para que el sistema deje de percolar. Es evidente que $p_c = 1$, aunque de todos modos vamos a ver cómo podemos llegar al mismo resultado con técnicas del grupo de renormalización.

Dicha técnica se aplica según el procedimiento siguiente. En primer lugar tenemos que escoger una celda y redefinirla como un solo elemento ocupado a no. Para ello podemos definirla como un par de nodos o bien como n nodos consecutivos. Por sencillez escogeremos las celdas formadas por parejas de nodos en la forma indicada en la figura 5.4. Con esta elección y adoptando el criterio de que cada nueva celda se considera ocupada sólo si está formada a partir de nodos ocupados, obtenemos la configuración de la figura 5.5. Nótese que la red resultante no tiene la misma escala que la original (la separación nodal en la nueva es el doble que en la antigua), por lo que habrá que reajustarla para completar la renormalización. En la configuración que hemos obtenido, cada nodo ocupado tiene una probabilidad p' siendo $1 - p'$ la probabilidad de su estado complementario. ¿Cuál será la transformación $\mathcal{R}(p)$ tal que $p' = \mathcal{R}(p)$? Para obtenerla es preciso evaluar qué posibles configuraciones admite una celda para que el nodo que la represente en la red nueva se considere ocupado. En el caso unidimensional es sencillo: sólo contribuye una celda si los dos nodos originales están ocupados. De lo contrario, no habrá percolación. Así pues, la probabilidad p' del nodo ocupado corresponde a una celda con probabilidad p^2 con lo cual,

$$p' = \mathcal{R}(p) = p^2 . \quad (5.7)$$

Para poder calcular el exponente crítico ν es necesario encontrar primero los puntos fijos, es decir, aquellos valores para los que $p' = p = p^*$,

$$p^* = \mathcal{R}(p^*) = p^{*2} , \quad (5.8)$$

de donde obtenemos,

$$p^* = 0 , \quad p^* = 1 , \quad (5.9)$$

y recuperamos la solución $p_c = 1$ que ya habíamos adelantado.

Para obtener un valor numérico de ν debemos considerar $\mathcal{R}(p)$ y desarrollarlo a primer orden en torno a $p = p^*$,

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}(p^*) + \lambda(p - p^*) + \dots , \quad (5.10)$$

donde,

$$\lambda = \left(\frac{d\mathcal{R}}{dp} \right)_{p=p^*} = 2p^* = 2 . \quad (5.11)$$

Sabemos que el tamaño del clúster, ξ , debe ser el mismo antes y después de renormalizar, con lo cual $\xi'(p') = \xi(p)$. Como son la misma función, ambas deben tener la misma dependencia potencial cerca del punto crítico. Deducimos entonces que,

$$\xi'(p') = |p' - p_c|^{-\nu} . \quad (5.12)$$

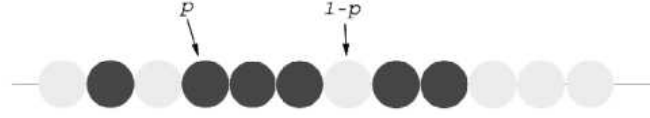


Figura 5.3: Probabilidad asignada a cada nodo.



Figura 5.4: Celdas.

Por otra parte, como el sistema cambia de escala al redefinir las celdas se debe cumplir,

$$\xi'(p') = b^{-1}\xi(p) , \quad (5.13)$$

con lo cual

$$|p' - p_c|^{-\nu} \sim b^{-1}|p - p_c|^{-\nu} . \quad (5.14)$$

Por lo tanto, tenemos

$$|p' - p_c|^{-\nu} = \lambda^{-\nu}|p - p_c|^{-\nu} . \quad (5.15)$$

Comparando (5.14) y (5.15) llegamos a

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 . \quad (5.16)$$

Este resultado es exacto, lo cual no sucederá en otros modelos como el que presentamos a continuación.

La extensión del grupo de renormalización a *site percolation* en dimensiones superiores no es muy complicado de hacer y se encuentran resultados bastante buenos sin demasiado esfuerzo para el caso de una red triángular [PB89].

Para un caso de *bond percolation* en dimesión dos la situación es más complicada pero merece la pena ver un caso particular, que presentamos a continuación.

5.4. Bond percolation en una red cuadrada

En caso de *bond percolation* requiere un poco más de atención porque tenemos dos clases de cantidades: nodos (*sites*) de la red que sirven para definir la topología y las conexiones (*bonds*) posibles entre ellos. En nuestro caso las variables son las conexiones pero su comportamiento va ligado a su posición y ocupación.

Esta estructura particular implica que a la hora de aplicar el grupo de renormalización debemos fijarnos en las dos cantidades, es decir cómo se eliminan los nodos y se definen los nuevos, y cómo se construyen las nuevas conexiones. Así el problema de definir la celda de partida y la celda renormalizada requiere un análisis preliminar detallado.

En nuestro caso vamos a empezar con una red cuadrada con los nodos habituales y únicamente conexiones a primeros vecinos, tal y como puede verse en la figura 5.6. Nuestro proceso de renormalización consistirá en sustituir los cuatro nodos de una celda de 2×2 por un único nodo situado en el extremo izquierdo superior (figura 5.6). De esta forma el factor de escala espacial es $b = 2$, y por ello el factor de reducción de nodos es $b^2 = 4$.

Este proceso es equivalente al *blocking* de Kadanoff visto en los capítulos anteriores, pero ahora hemos de especificar cómo construimos las nuevas conexiones entre estos nuevos nodos. Hemos pues de definir un algoritmo que nos diga si dos nuevos nodos están conectados o no en función de la conexiones previas. Dicho algoritmo ha de ser lo suficientemente razonable en el sentido de que si inicialmente hay un camino que conectaba dichas celdas, los nuevos nodos también estén conectados.



Figura 5.5: Nueva configuración.

Una posibilidad es definir una celda elemental de tamaño 2×3 o 3×2 , en el sistema inicial que nos ayudará a evaluar la conectividad de los nuevos nodos.

En la figura 5.6 vemos un ejemplo de estos dos tipos de celdas auxiliares, una vertical y otra horizontal, y las nuevas conexiones que controlan.

Tomamos ahora una de estas celdas y dibujamos todos los casos posibles que están relacionados con la posible conexión entre celdas, cada uno con su peso probabilístico (figura 5.7), y que dan conectividad no nula entre los nodos renormalizados. La suma de todas las contribuciones nos da la nueva probabilidad,

$$\begin{aligned} p' &= \Re(p) \\ &= p^5 + 5p^4(1-p) + 8p^3(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 \\ &= 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

que tiene las soluciones fijas triviales, $p^* = 0$ y $p^* = 1$, pero que también tiene una solución no trivial, $p^* = 1/2$, que es precisamente el valor exacto para este modelo.

El cálculo del autovalor da $\lambda = 13/8$, y como tenemos que $b = 2$, podemos obtener el valor del exponente ν ,

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = 1,428. \quad (5.18)$$

Este resultado es una muy buena aproximación (7 %) respecto del valor exacto que se cree tiene dicho exponente: $\nu = 4/3$.

En este punto acabamos con las aplicaciones del grupo de renormalización estático.

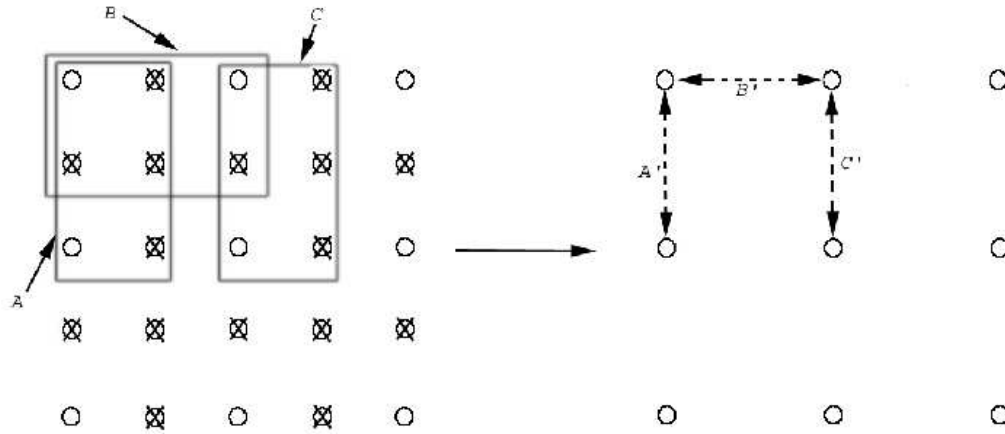


Figura 5.6: En estos diagramas se señalan los nodos a eliminar y los nodos que sobreviven con sus posibles nuevas conexiones.

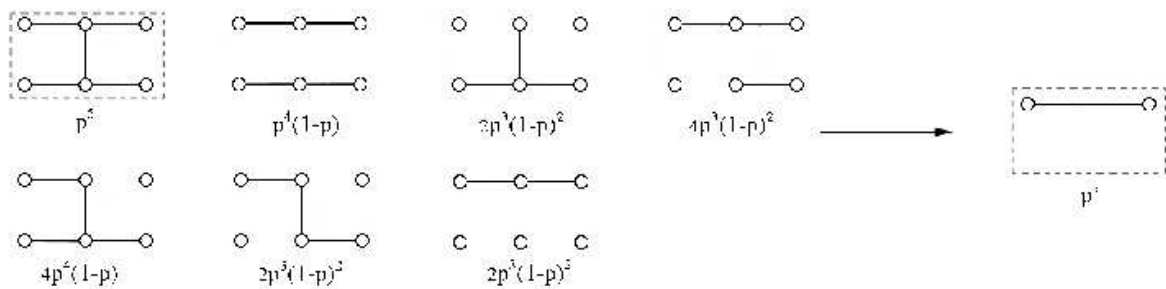


Figura 5.7: Conexiones en una celda horizontal que contribuyen a una conexión en el espacio renormalizado. Se indican también en peso de cada diagrama.

Parte II

Grupo de renormalización dinámico

Capítulo 6

Introducción al Grupo de Renormalización Dinámico

6.1. Nuevos conceptos y definiciones

En las proximidades de un punto crítico también hay anomalías en los observables dinámicos de un sistema, como ocurre con el tiempo de relajación, τ , de las fluctuaciones espontáneas. El comportamiento de este observable cerca del punto crítico puede caracterizarse mediante un nuevo exponente crítico z , en la forma habitual,

$$\tau \sim (\epsilon - \epsilon_c)^{-z}, \quad (6.1)$$

donde ϵ es el parámetro que controla el acercamiento al punto crítico. Aquí podemos ver que si las fluctuaciones relajan exponencialmente como $e^{-t/\tau}$ entonces al acercarnos al punto crítico la dinámica se hace cada vez más lenta. Este efecto se conoce como *critical scaling down*.

Nos podemos preguntar si al considerar los aspectos dinámicos cerca del punto crítico todavía podemos mantener todo el esquema de análisis descrito en los capítulos anteriores. La respuesta es que sí, pero introduciendo las extensiones apropiadas que conducen a la formulación del *grupo de renormalización dinámico* (grupo de renormalización dinámico).

El grupo de renormalización dinámico trata de caracterizar el comportamiento crítico completo de cualquier sistema, de forma similar como lo hizo el grupo de renormalización estático para sistemas en equilibrio. Sin embargo tenemos una ventaja adicional ahora, y es que el grupo de renormalización dinámico deberá también explicar los comportamientos estáticos, y mejor aún, nos permitirá ampliar nuestro conocimiento al poder extenderse al estudio de comportamientos críticos fuera de equilibrio.

De la misma forma que el grupo de renormalización estático caracterizaba los distintos sistemas críticos ahora también tendremos clases de universalidad dinámicas, *scaling* dinámico y exponentes críticos dinámicos. Sin embargo aparecen preguntas nuevas,

- ¿qué tipos de simetrías o variables relevantes determinan las clases de universalidad dinámicas?,
- ¿cuales son los observables dinámicos más adecuados y que exponentes deben definirse?,
- ¿hay *leyes de scaling* que mezclen los exponentes críticos dinámicos y estáticos?,

entre otras. Veremos las respuestas a algunas de estas preguntas en los próximos capítulos.

En el grupo de renormalización estático, las propiedades críticas las encontramos, bien a partir de las distribuciones de equilibrio del sistema o de las funciones de partición. En el caso dinámico esto no va a ser posible. Necesitamos cantidades dinámicas (ecuaciones principalmente) sobre las que aplicar el grupo de renormalización dinámico.

Ecuaciones dinámicas existen de dos formas que podríamos identificar con la imagen de Heisenberg (ecuación para la variable campo) o con la imagen de Schrödinger (ecuación para la densidad de probabilidad de la variable campo).

La primera de ellas tiene una estructura formal para una serie de variables campos $\phi_i(t)$ o $\phi(\bar{x}, t)$ (para el caso discreto o el continuo, respectivamente), con ecuaciones del movimiento de la forma

$$\frac{d\phi_i}{dt} = F(\phi_i, \phi_{i+k}, k_1, k_2, \dots) , \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = F(\phi, \nabla^2\phi, k_1, k_2, \dots) . \quad (6.3)$$

Las ecuaciones más usadas son las llamadas ecuaciones de Langevin, que son ecuaciones estocásticas en derivadas parciales. Tienen la forma genérica siguiente,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = F(\phi, \nabla^2) + \xi(\mathbf{x}, t) , \quad (6.4)$$

donde F es una función no lineal en ϕ con derivada espaciales, y $\xi(\mathbf{x}, t)$ es una proceso estocástico cuyas propiedades estadísticas se han de especificar en base a argumentos físicos, alguno de los cuales veremos a continuación.

Para el segundo caso tenemos ecuaciones dinámicas para las densidades de probabilidad $P(\{\phi\}, t)$ de las configuraciones del sistema,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}(\{\phi\}, k_1, k_2, \dots) P , \quad (6.5)$$

donde $\mathcal{L}(\{\phi\}, k_1, k_2, \dots)$ puede ser un operador bastante complicado.

Se nos plantea ahora el problema de como derivar estas ecuaciones para un sistema concreto. El origen de las ecuaciones para el campo es más fácil de entender. Una parte de una ecuación de la física macroscópica como puede ser la ecuación de Navier-Stokes y se le añade un ruido aditivo. Este método es el más usado para describir situaciones alejadas del equilibrio, como veremos en el capítulo 8 en el estudio de las ecuaciones que describen el crecimiento interfacial.

Si uno quiere tener una ecuación dinámica que represente también un estado estacionario de equilibrio, el procedimiento es diferente. El punto de partida ahora es un hamiltoniano o funcional de energía libre $\mathcal{H}(\{\phi\})$, y construimos una ecuación dinámica de Langevin de la forma,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} + \xi(\mathbf{x}, t) , \quad (6.6)$$

donde Γ es un coeficiente cinético, y ξ es un ruido blanco gaussiano de media nula y correlación

$$\langle \xi(\mathbf{x}, t) \xi(\mathbf{x}', t') \rangle = 2\Gamma k_B T \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (6.7)$$

Este tipo de ruido satisface el teorema de fluctuación y disipación, que nos asegura que la distribución estacionaria de este sistema es precisamente la distribución de equilibrio de Boltzmann.

La demostración de este resultado, que puede encontrarse en [GOS99], empieza por deducir la ecuación funcional de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad $P(\{\phi\}, t)$,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int d^d x \frac{\delta}{\delta\phi} \Gamma \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} + k_B T \frac{\delta}{\delta\phi} \right) P , \quad (6.8)$$

que es un ejemplo de ecuación dinámica del segundo tipo. Podemos comprobar que la solución estacionaria es la de equilibrio correspondiente al hamiltoniano de partida,

$$P_{st} = P_{eq} \sim e^{-\frac{\mathcal{H}(\{\phi\})}{k_B T}} . \quad (6.9)$$

Es importante destacar que si bien \mathcal{H} determina la clase de universalidad estática o de equilibrio, el coeficiente cinético Γ va a determinar la subclase de universalidad dinámica. Es decir, la clase de universalidad estática se subdivide a su vez en subclases dinámicas. Conviene destacar aquí que las siguientes subclases que aparecen frecuentemente en estudios de dinámica crítica. Para $\Gamma = \text{cte}$ (variable ϕ no conservada, como es el caso de la magnetización) o $\Gamma = -\text{cte} \nabla^2$ (variable conservada, como puede serlo la densidad en una mezcla binaria) tenemos dos subclases de universalidad dinámicas diferentes para una misma clase de universalidad de equilibrio. Si por otra parte resulta que Γ depende del campo ϕ entonces podemos tener otras clases dinámicas. En particular para $\Gamma \sim \phi$ tenemos una nueva clase de universalidad que aparece en modelos de percolación.

6.2. Prescripciones básicas del grupo de renormalización dinámico

Nuestro punto de partida será una ecuación del tipo (6.4), sobre la que aplicaremos los siguientes pasos del grupo de renormalización dinámico, que son una extensión de los del grupo de renormalización estático:

1. Análisis de escala de la ecuación dinámica (6.4) mediante las siguientes transformaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= b\hat{\mathbf{x}} , \\ t &= b^z\hat{t} , \\ \phi &= b^{-x}\hat{\phi} , \end{aligned} \tag{6.10}$$

obteniendo como resultado la relevancia de los diferentes parámetros o constantes de acoplamiento, las dimensiones críticas, y los exponentes triviales.

2. Eliminación de variables para el caso del grupo de renormalización dinámico en espacio real. Nosotros aquí usaremos el grupo de renormalización dinámico en espacio de momentos y por ello, transformaremos la ecuación (6.4) al espacio de Fourier en \mathbf{k} y ω . Resolveremos formalmente la ecuación para los modos $\phi(\mathbf{k}, \omega)$ tal que $\pi/ab < |k| < \pi/a$, a fin de eliminarlos.
3. Transformaremos las ecuaciones resultantes mediante los cambios (6.10), con el fin de obtener las transformaciones de los parámetros,

$$\mathbf{K}' = T_D(\mathbf{K}) . \tag{6.11}$$

4. Considerando que el parámetro $b = e^l$, y que l es infinitesimal, podemos obtener las ecuaciones del flujo de grupo de renormalización dinámico,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dl} = \mathbf{f}(\mathbf{K}) , \tag{6.12}$$

a partir de las cuales esperamos analizar las propiedades críticas de nuestro sistema, y en particular obtener el exponente dinámico z , que también puede hallarse de la siguiente forma.

5. Si hemos llegado a tener las transformaciones del tiempo,

$$\hat{t} = g(\mathbf{K})t , \tag{6.13}$$

$$\hat{t} = L^{-z}t , \tag{6.14}$$

donde la primera ecuación proviene de la eliminación de variables y la segunda de la transformación de escala (6.10) en función del parámetro L o factor de decimación. Si conocemos el punto fijo de (6.11), \mathbf{K}^* , podemos obtener z a partir de su definición,

$$z = -\frac{\ln g(\mathbf{K}^*)}{\ln L} . \tag{6.15}$$

En los capítulos que siguen veremos como se aplican estas recetas en sistemas concretos.

6.3. La función de correlación espacio-temporal

La función de correlación es la variable dinámica más importante, porque es un observable experimental, tanto en sistemas en el equilibrio como fuera de él. Se obtiene en experimentos de *scattering* a partir de la función de estructura (transformada de Fourier de la función de correlación). La función de correlación dinámica se define de la siguiente forma,

$$g_s(\epsilon, \mathbf{r}, t) = \langle [s(\mathbf{x}' + \mathbf{r}, t) - \langle s \rangle] [s(\mathbf{x}', t) - \langle s \rangle] \rangle , \tag{6.16}$$

donde ϵ es la variable que controla la distancia al punto crítico.

Después de hacer el blocking, tendremos unas nuevas variables $\hat{s}(\hat{r}, \hat{t})$ que están relacionadas con las anteriores según

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \frac{\mathbf{r}}{L} , \\ \hat{t} &= \frac{t}{L^z} , \\ \hat{\epsilon} &= L^y \epsilon , \\ \hat{s}(\epsilon, \hat{r}, \hat{t}) &= L^\chi s\left(L^y \epsilon, \frac{\mathbf{r}}{L}, \frac{t}{L^z}\right) ,\end{aligned}\tag{6.17}$$

que implica la siguiente relación,

$$g_s(\epsilon, \mathbf{r}, t) = g_s(\hat{\epsilon}, \hat{r}, \hat{t}) = L^{2\chi} g_s\left(L^y \epsilon, \frac{\mathbf{r}}{L}, \frac{t}{L^z}\right) .\tag{6.18}$$

De este resultado, poniendo $|\mathbf{r}| = L$, podemos obtener,

$$g(\epsilon, \mathbf{r}, t) = |\mathbf{r}|^{2\chi} F\left(|\mathbf{r}|^y \epsilon, \frac{t}{|\mathbf{r}|^z}\right) ,\tag{6.19}$$

que en el punto crítico ($\epsilon \sim 0$) se reduce a,

$$g(\mathbf{r}, t)_c \sim |\mathbf{r}|^{2\chi} F\left(\frac{t}{|\mathbf{r}|^z}\right) .\tag{6.20}$$

Aquí podemos ver que la función de correlación en el punto crítico puede caracterizarse con dos exponentes: χ (exponente del campo) y z (exponente dinámico).

Resumiendo, ahora nos aparecerán nuevas clases de universalidad y también los conceptos de relevancia, pero ahora aplicados a los procesos dinámicos. En los sistemas críticos estáticos los parámetros básicos que distinguen las distintas clases de universalidad son la dimensión del espacio y el número de componentes del parámetro de orden, es decir: las simetrías del sistema. En las clases de universalidad dinámicas será muy importante para dicha caracterización las leyes de conservación o simetrías dinámicas.

6.4. Grupo de renormalización dinámico en el Espacio Real: un ejemplo

Dado de que vamos a hacer el grupo de renormalización dinámico en espacio de momentos se incluye aquí un ejemplo sencillo de grupo de renormalización dinámico en espacio real para que se vea como funciona. Como ejemplo vamos a coger un modelo que tiene solución casi exacta [Suz79]. El modelo viene descrito por la ecuación dinámica

$$\frac{ds_i}{dt} = -\alpha s_i + \gamma(s_{i+1} + s_{i-1}) , \quad \text{donde } \alpha, \gamma > 0 .\tag{6.21}$$

Como podemos reescalar el tiempo, podemos escoger $\alpha = 1$ y de esta forma tenemos un parámetro menos. Transformando por Fourier la ecuación anterior para la variable s_{2i} obtenemos

$$-i\omega \tilde{s}_{2i} = -\tilde{s}_{2i} + \gamma(\tilde{s}_{2i+1} + \tilde{s}_{2i-1}) ,\tag{6.22}$$

que puede resolverse formalmente de la forma

$$(1 - i\omega) \tilde{s}_{2i} = \gamma(\tilde{s}_{2i+1} + \tilde{s}_{2i-1}) .\tag{6.23}$$

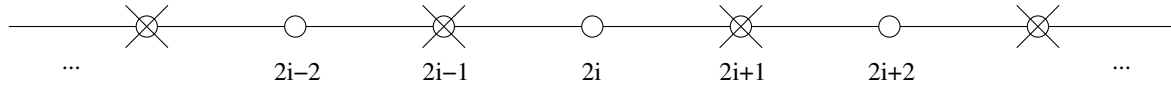


Figura 6.1: Blocking para el sistema definido por la ecuación (6.21).

En analogía con lo que hacíamos cuándo el grupo de renormalización estático, realizaremos el blocking tal i como se muestra en la figura 6.1.

Ahora hacemos la decimación eliminando los índices impares, para los que usamos la forma de la solución (6.23),

$$\begin{aligned} (1 - i\omega)\tilde{s}_{2i-1} &= \gamma(\tilde{s}_{2i} + \tilde{s}_{2i-2}) , \\ (1 - i\omega)\tilde{s}_{2i+1} &= \gamma(\tilde{s}_{2i+2} + \tilde{s}_{2i}) , \end{aligned} \quad (6.24)$$

y que luego sustituiremos en la ecuación (6.23). Después de cierta álgebra, obtenemos

$$(1 - 2i\omega - \omega^2)\tilde{s}_{2i} = \gamma^2(2\tilde{s}_{2i} + \tilde{s}_{2i+2} + \tilde{s}_{2i-2}) , \quad (6.25)$$

donde nos aparece un nuevo término en ω^2 , hecho que denota que la dinámica para las variables que sobreviven es más complicada. Despreciaremos este término pues nos interesa en orden más bajo en ω (tiempos largos), además, de esta forma conseguimos preservar la simetría de las ecuaciones. Así, pues,

$$-2i\omega\tilde{s}_{2i} = -(1 - 2\gamma^2)\tilde{s}_{2i} + \gamma^2(\tilde{s}_{2i+2} + \tilde{s}_{2i-2}) , \quad (6.26)$$

que puede escribirse cómo,

$$-i\omega\tilde{s}_{2i} = -\frac{1 - 2\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{1 - 2\gamma^2}{1 - 2\gamma^2}(\tilde{s}_{2i+2} + \tilde{s}_{2i-2}) , \quad (6.27)$$

y que, si antitransformamos, nos lleva a la ecuación dinámica

$$\frac{ds_{2i}}{dt} = -s_{2i} + \hat{\gamma}(s_{2i+2} + s_{2i-2}) . \quad (6.28)$$

Podemos ver que la nueva ecuación tiene la misma forma que la ecuación (6.21) para la mitad de las variables dinámicas (debido a la decimación), con parámetros nuevos y con un cambio en la escala del tiempo,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \frac{\gamma^2}{1 - 2\gamma^2} , \\ \hat{t} &= \frac{1}{2}(1 - 2\gamma^2)t . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dichos cambios constituyen la transformación del grupo de renormalización dinámico. Podemos buscar, en analogía con lo que hacíamos en el grupo de renormalización estático, los puntos fijos de la transformación del parámetro γ ,

$$\gamma^* = \frac{\gamma^{*2}}{1 - 2\gamma^{*2}} \implies \begin{cases} \gamma^* = -1 \\ \gamma^* = \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (6.30)$$

Descartamos la solución negativa porque, en la ecuación inicial (6.21), γ es una constante positiva. Haciendo uso de (6.29) y teniendo en cuenta que en la decimación hemos eliminado la mitad de las variables y que, por consiguiente, $L = 2$, encontramos, y aplicando la definición de z en (6.15), obtenemos

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \frac{1}{4} = \frac{1}{L^z} \implies z = 2 . \quad (6.31)$$

Llegamos, pues, a obtener el exponente crítico dinámico $z = 2$. Este modelo también puede resolverse con ruido aditivo. Los interesados pueden consultar [GMTB95].

Para acabar vamos a usar este mismo ejemplo para discutir la forma continua que puede tomar este modelo. La ecuación inicial (6.21) puede reescribirse tal que

$$\frac{ds_i}{dt} = -(1 - 2\gamma)s_i + \gamma(s_{i+1} + s_{i-1} - 2s_i) . \quad (6.32)$$

cuyo límite continuo puede fácilmente intuirse,

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = -as + K\nabla^2 s , \quad (6.33)$$

donde

$$a = 1 - 2\gamma, \quad (6.34)$$

$$K = \gamma\Delta x^2 . \quad (6.35)$$

Antes obtuvimos que en el punto fijo estaba en $\gamma^* = 1/2$, por lo que $a^* = 0$. Veremos que esta es la condición de criticalidad del modelo dinámico gaussiano, y del modelo de crecimiento superficial de Edwards–Wilkinson. Podemos avanzar pues que estos tres modelos pertenecen a la misma clase de universalidad estática y dinámica.

Capítulo 7

Grupo de renormalización dinámico de equilibrio: dinámica crítica

Vamos a aplicar aquí las técnicas del grupo de renormalización dinámico en espacio de momentos a sistemas que tienen un estado estacionario de equilibrio. Esperamos que el grupo de renormalización dinámico nos dé también la información correcta del grupo de renormalización estático que hemos visto anteriormente, y no complete el estudio de los fenómenos críticos dando información sobre las propiedades dinámicas en las cercanías de un punto crítico, como pueden ser el exponente de relajación temporal y la función de correlación dinámica.

Si bien existen otras formulaciones del grupo de renormalización dinámico para sistemas en equilibrio, aquí seguiremos las técnicas del grupo de renormalización sobre la ecuación de Langevin, que luego son extensibles a sistemas fuera de equilibrio incluso sin estado estacionario. Las referencias básicas son [GOS99] y [BS95].

Estudiaremos pues los dos modelos continuos estudiados anteriormente en la situación de equilibrio: el modelo gaussiano y el modelo de Ginzburg-Landau-Wilson.

7.1. Modelo gaussiano dinámico

Este modelo ¹ parte de la ecuación dinámica definida en el capítulo anterior con el potencial de Ginzburg-Landau-Wilson tomando el coeficiente del término cuártico nulo, i.e. $u \equiv 0$. Así pues, calculando la variación respecto al parámetro ϕ de este Hamiltoniano, obtenemos la ecuación diferencial que nos define el modelo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} + \xi(\mathbf{x}, t) = -r\phi + \mu \nabla^2 \phi + \xi(\mathbf{x}, t), \quad (7.1)$$

donde ξ es un ruido blanco gaussiano, y de media nula,

$$\langle \xi(\mathbf{x}, t) \xi(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (7.2)$$

El primer paso es aplicar las transformaciones de escala ya definidas anteriormente en esta ecuación de Langevin,

$$x = b\hat{x}, \quad (7.3a)$$

$$t = b^z \hat{t}, \quad (7.3b)$$

$$\phi = b^{-x} \hat{\phi}, \quad (7.3c)$$

¹Más adelante veremos una variante de este mismo modelo con el nombre de Edwards-Wilkinson.

y sustituyéndolas en (7.1) obtenemos la nueva ecuación de Langevin,

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = -r b^z \hat{\phi} + \mu b^{z-2} \nabla_{\hat{x}}^2 \hat{\phi} + b^{z+\chi} \xi(b\hat{x}, b^z \hat{t}) , \quad (7.4)$$

con un nuevo ruido, dado por

$$\hat{\xi}(\hat{x}, \hat{t}) := b^{z+\chi} \xi(b\hat{x}, b^z \hat{t}) . \quad (7.5)$$

Dadas las propiedades del ruido ξ , ec. (7.2), podemos encontrar las propiedades del nuevo ruido escalado $\hat{\xi}$,

$$\langle \hat{\xi}(\hat{x}, \hat{t}) \hat{\xi}(\hat{x}', \hat{t}') \rangle = 2D b^{z+2\chi-d} \delta^d(\hat{x} - \hat{x}') \delta(\hat{t} - \hat{t}') , \quad (7.6)$$

donde hemos utilizado la propiedad de escala de la distribución delta d-dimensional,

$$\delta^d(\lambda x) = \lambda^{-d} \delta(x) . \quad (7.7)$$

De esta forma obtenemos los nuevos parámetros del modelo una vez hecha la transformación de escala

$$r' = r b^z , \quad (7.8a)$$

$$\mu' = \mu b^{z-2} , \quad (7.8b)$$

$$D' = D b^{z+2\chi-d} , \quad (7.8c)$$

que volverán a aparecer bastantes veces a partir de ahora. Si imponemos la invariancia de los parámetros μ y D , llegamos a las siguientes igualdades,

$$z - 2 = 0 , \quad (7.9)$$

$$z + 2\chi - d = 0 , \quad (7.10)$$

y, por consiguiente,

$$z = 2 , \quad (7.11)$$

$$\chi = \frac{d-2}{2} , \quad (7.12)$$

que son los exponentes críticos del modelo. Recuperamos el valor de χ de la estática, así como la relevancia del parámetro r ,

$$r' = r b^2 , \quad (7.13)$$

cosa que implica $r^* = 0$. Además obtenemos el exponente dinámico z .

La función de correlación en el punto crítico ($r = 0$) (ver el capítulo anterior) tiene la siguiente forma escalada

$$g(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{x}|^{2-d} f\left(\frac{t}{|\mathbf{x}|^2}\right) , \quad (7.14)$$

cuya transformada de Fourier, la función de estructura, es accesible mediante experimentos de *scattering*.

Si transformamos por Fourier la ecuación del modelo gaussiano (7.1),

$$-i\omega \phi = -r\phi - \mu k^2 \phi + \xi(\mathbf{k}, \omega) , \quad (7.15)$$

obtenemos que es válida para todos los valores del vector de onda \mathbf{k} , es decir ya tenemos los grados de libertad separados en el espacio de Fourier y, por lo tanto, únicamente bastaría hacer el análisis de escala para obtener los resultados del grupo de renormalización. En efecto las ecuaciones del flujo del grupo de renormalización correspondientes a las ecuaciones (7.8) son

$$\frac{dr}{dl} = zr , \quad (7.16)$$

$$\frac{d\mu}{dl} = (z-2)\mu , \quad (7.17)$$

$$\frac{dD}{dl} = (z+2\chi-d)D , \quad (7.18)$$

que también volverán a aparecer a menudo. Estas ecuaciones nos dan la localización del punto fijo en $r^* = 0$, y los exponentes ya indicados anteriormente.

De todas formas puede resolverse explícitamente la ecuación en el espacio de Fourier,

$$\phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\xi(\mathbf{k}, \omega)}{r + \mu k^2 - i\omega} , \quad (7.19)$$

de donde obtenemos la función de correlación,

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{k}, \omega) \phi(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= \frac{\langle \xi(\mathbf{x}, \omega) \xi(\mathbf{x}', \omega') \rangle}{(r + \mu k^2 - i\omega)(r + \mu k'^2 - i\omega')} \\ &= \frac{2D(2\pi)^{d+1} \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega')}{(r + \mu k^2)^2 + \omega^2} . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Por lo tanto, la función de estructura es,

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2D}{(r + \mu k^2)^2 + \omega^2} , \quad (7.21)$$

que escala de la forma adecuada en el punto crítico.

7.2. Modelo Ginzburg-Landau-Wilson dinámico

Partimos del ya comentado Hamiltoniano del modelo ϕ^4 de Ginzburg-Landau-Wilson,

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left\{ \mu \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + r \frac{\phi^2}{2} + u \frac{\phi^4}{4} \right\} , \quad (7.22)$$

y escribimos su correspondiente ecuación dinámica,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} + \xi(\mathbf{x}, t) = -r\phi + \mu \nabla^2 \phi - u\phi^3 + \xi(\mathbf{x}, t) . \quad (7.23)$$

Esperamos que la renormalización de esta ecuación nos de también la información estática o de equilibrio que ya conocemos y además la información crítica dinámica.

7.2.1. Análisis de Escala

Empezaremos por las transformaciones de escala (7.3) de la ecuación dinámica (7.23), que al aplicarlas sobre (7.23) nos llevan a

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = -r b^z \hat{\phi} + \mu b^{z-2} \nabla_{\hat{x}}^2 \hat{\phi} - u b^{z-2\chi} \hat{\phi}^3 + \hat{\xi}(\hat{x}, \hat{t}) , \quad (7.24)$$

con las mismas propiedades del nuevo ruido que en el caso gaussiano. Finalmente obtenemos las las siguientes transformaciones de los parámetros,

$$r' = r b^z , \quad (7.25a)$$

$$\mu' = \mu b^{z-2} , \quad (7.25b)$$

$$u' = u b^{z-2\chi} , \quad (7.25c)$$

$$D' = D b^{z+2\chi-d} . \quad (7.25d)$$

Si ahora suponemos la invariancia de μ y D bajo la transformación de escala (7.3), obtenemos los exponentes clásicos de la estática más el exponente dinámico clásico, $z = 2$. Usando estos datos en los otros dos parámetros tenemos que

$$r' = r b^2 , \quad (7.26)$$

$$u' = u b^{4-d} , \quad (7.27)$$

que nos indica que r es un parámetro relevante siempre y cuando la relevancia de u depende de la dimensión, tal y como ya habíamos visto en el análisis del grupo de renormalización estático de este modelo. La dinámica no cambia, pues, esta propiedad.

Esperamos que los exponentes del modelo gaussiano tengan correcciones debidas a la no-linealidad del modelo y que dependan de la dimensión, d , para $d < d_c \equiv 4$, donde tenemos una teoría no trivial. Si desarrollamos alrededor de un parámetro $\epsilon \equiv 4 - d$, esperamos obtener las correspondientes correcciones,

$$z = 2 + o(\epsilon) , \quad (7.28)$$

$$\chi = \frac{d-2}{2} + o(\epsilon) , \quad (7.29)$$

además de toda la información de la estática. En particular veremos que las correcciones a estos exponentes son de orden superior, ϵ^2 .

7.2.2. Solución formal diagramática

Transformemos por Fourier la ecuación dinámica del modelo ϕ^4 (7.23),

$$-i\omega\phi = -r\phi - \mu k^2\phi + \xi(\mathbf{k}, \omega) - u \int_{\mathbf{k}_2, \omega_2} \int_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \phi(\mathbf{k}_2, \omega_2) \phi(\mathbf{k}_1, \omega_1) \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) . \quad (7.30)$$

Resolviendo formalmente llegamos a la siguiente ecuación integral,

$$\phi = \frac{1}{r + \mu k^2 - i\omega} \left(\xi(\mathbf{k}, \omega) - u \int_{\mathbf{k}_2, \omega_2} \int_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \phi(\mathbf{k}_2, \omega_2) \phi(\mathbf{k}_1, \omega_1) \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \right) . \quad (7.31)$$

Definiremos un campo desnudo (lineal o no perturbado), ϕ_0 , en función de un propagador, G_0 ,

$$\phi_0 \equiv G_0(\mathbf{k}, \omega) \xi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{r + \mu k^2 - i\omega} \xi(\mathbf{k}, \omega), \quad (7.32)$$

que no será más que la solución del problema gaussiano. Esquemáticamente podremos escribir,

$$\phi = \phi_0 - u G_0(\mathbf{k}, \omega) \int \int \phi \phi \phi, \quad (7.33)$$

que define una notación implícita diferente. Esto lo podemos reescribir de la forma diagramática que podemos observar en la figura 7.1. A partir de esta estructura diagramática desarrollaremos las técnicas del grupo de renormalización dinámico.

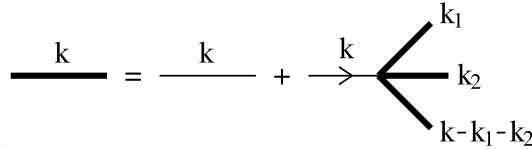
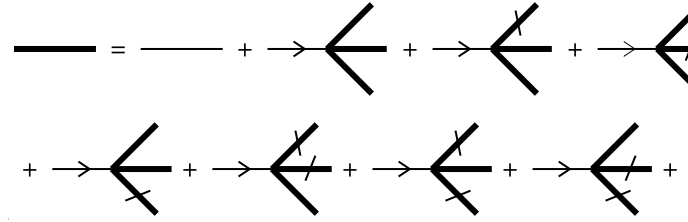


Figura 7.1: Versión diagramática de la ecuación (7.33). La leyenda encima de cada línea indica el argumento del momento de la función correspondiente.

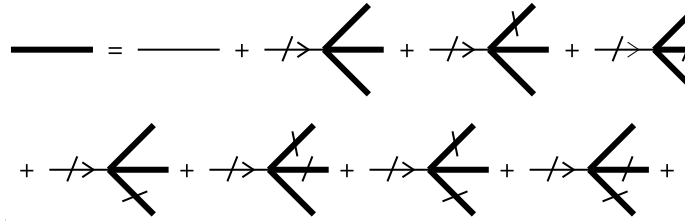
7.2.3. Eliminación de variables en espacio de momentos

Cada campo ϕ , ϕ_0 se divide en dos dependiendo del valor de su vector de donde \mathbf{k} ,

$$\phi(\mathbf{k}) = \begin{cases} \phi^< : & 0 < |\mathbf{k}| < \frac{\pi}{ab} \\ \phi^> : & \frac{\pi}{ab} < |\mathbf{k}| < \frac{\pi}{a} \end{cases} , \quad (7.34)$$



(a) Modos internos.



(b) Modos externos.

Figura 7.2: Ecuaciones de evolución para los modos internos (a) y externos (b). Estos últimos se representan mediante líneas barradas, mientras que los modos externos vienen representados por líneas normales.

donde π/a es el vector de onda de corte. La idea es eliminar $\phi^>$ mediante los promedios estadísticos sobre el ruido con $\mathbf{k}^>$.

La ecuación formal de la figura 7.1 se divide en dos, una para cada campo, como se esquematiza diagramáticamente en la figura 7.2.

Para eliminar los modos externos, la ecuación de evolución para el campo externo, fig. 7.2(b) se resuelve iterativamente hasta segundo orden en el parámetro u (a orden de un *loop*). El resultado obtenido se sustituye en la ecuación para el campo interno, fig. 7.2(a). Finalmente, los modos externos se promedian fuera de la ecuación interna resultante. La ecuación que queda, una vez renormalizada, se representa en la figura 7.3.

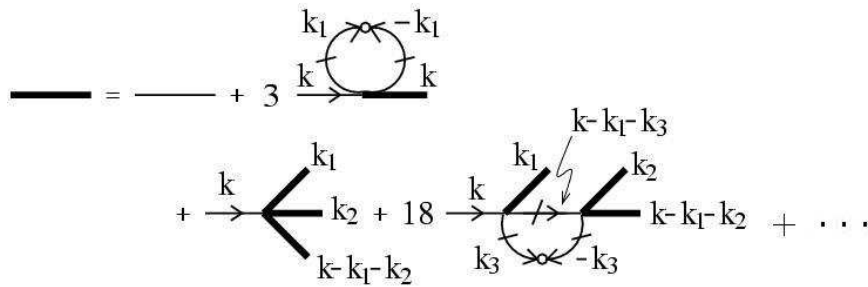


Figura 7.3: Ecuación renormalizada para los modos internos una vez los externos han sido eliminados y promediados.

Como ejemplo de evaluación diagramática, analizaremos en detalle el segundo diagrama de la parte derecha de la figura 7.3. Este diagrama viene de un promedio sobre las realizaciones del ruido externo,

como se muestra en la figura 7.4. La integral correspondiente al vértice puede evaluarse teniendo en cuenta la expresión (7.32) y las propiedades del ruido. Todo esto resulta en

$$\begin{aligned} \int_{1,2}^> \phi^<(\mathbf{k}_2, \omega_2) \langle \phi_0^>(\mathbf{k}_1, \omega_1) \phi_0^>(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \rangle &= \phi^<(\mathbf{k}, \omega) \int_1^> 2DG_0^>(\mathbf{k}_1, \omega_1) G_0^>(-\mathbf{k}_1, -\omega_1) \\ &= \phi^<(\mathbf{k}, \omega) \int_1^> \frac{2D}{(r + \mu k_1^2)^2 + \omega_1^2} , , \end{aligned} \quad (7.35)$$

donde hemos simplificado de forma obvia la notación de la integral. En nuestra notación diagramática, simbolizamos este resultado como se muestra en la figura 7.4.

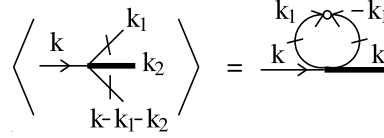


Figura 7.4: Diagrama que representa la expresión integral en la ecuación (7.35).

Comparando las figuras 7.1 y 7.3 vemos que, de los dos diagramas nuevos que aparecen debido a la integración, el primero suma a la parte izquierda de la ecuación, y el segundo al diagrama de tres patas en la banda derecha. Multiplicando la ecuación (7.33) por G_0^{-1} se puede ver que el diagrama de la figura 7.4 renormaliza el parámetro lineal r , el último diagrama de la figura 7.3² renormaliza el coeficiente no lineal u , mientras que el coeficiente de difusión μ queda invariante,

$$r_I = r + 3u \int_{k_1 \omega_1}^> \frac{2D}{(r + \mu k_1^2)^2 + \omega_1^2} , \quad (7.36)$$

$$u_I = u - 18u^2 \int_{k_3 \omega_3}^> \frac{2D}{(r + \mu k_3^2)^2 + \omega_3^2} \cdot \frac{1}{r + \mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 - i(\omega - \omega_1 - \omega_3)} , \quad (7.37)$$

$$\mu_I = \mu . \quad (7.38)$$

Las integrales en ω_i pueden calcularse mediante integración en el plano complejo, o usando las siguientes integrales tabuladas,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{2a} , \quad (7.39)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)(b + i\omega)} = \frac{1}{2a(b + a)} . \quad (7.40)$$

Para realizar las integrales sobre los momentos \mathbf{k}_i , debemos recordar que estamos realizando una expansión a primer orden en ϵ (u es pequeño) cerca del punto crítico (r es pequeño también, así como todos los vectores de onda internos en primera aproximación). Por ello en el cálculo de estos diagramas se ha de hacer también la simplificación de tomar los valores de $\mathbf{k}^<$ y sus correspondientes ω iguales a cero. El *cutoff* π/a puede tomarse igual a la unidad sin pérdida de generalidad. Finalmente, como b^l y l es pequeño, podemos considerar la integración en la capa de momentos como un proceso continuo. Debido a todas estas consideraciones, las integrales pueden calcularse, llegando a

$$r_I = r + 3 \frac{uD}{\mu} K_4 \left(1 - \frac{r}{\mu} \right) l , \quad (7.41)$$

$$u_I = u - 9 \frac{u^2 D}{\mu^2} K_4 l , \quad (7.42)$$

$$\mu_I = \mu , \quad (7.43)$$

²El cálculo de este diagrama es no trivial, y se deja como ejercicio.

donde el subíndice I denota «cálculo intermedio», y K_4 es $(2\pi)^{-4}$ veces la superficie de la hipersfera unidad 4-dimensional ($K_4 = 1/(8\pi^2)$). Más detalles de los cálculos puedes encontrarse en [GOS99, Ma76] (la segunda es una buena referencia clásica para la dinámica de equilibrio).

El análisis presentado hasta aquí no muestra como la intensidad del ruido se ve afectada por la transformación del grupo de renormalización. Esto se debe al hecho que el parámetro D no aparece explícitamente en la ecuación (7.33). Para hacerlo aparecer explícitamente uno puede «autocorrelacionar» esa ecuación, es decir, multiplicar la ecuación para $\phi(\mathbf{k}, \omega)$ por la ecuación para $\phi(\mathbf{k}', \omega')$. Esto se hace de forma diagramática de una manera sencilla. La figura 7.5(a) muestra la ecuación «autocorrelacionada» que se va a renormalizar. El resultado, después de promediar sobre el ruido externo, se muestra en la figura 7.5(b); donde puede verse que el primer diagrama que renormaliza D es un diagrama a dos vértices, lo que significa que es de orden $o(u^2)$. Así pues, D no se ve modificada por la transformación del grupo de renormalización a primer orden.

(a) Versión diagramática de la autocorrelación de la ecuación representada por la figura 7.3.

(b) Ecuación de autocorrelación de la figura 7.5(a) después de aplicarle la transformación del grupo de renormalización.

Figura 7.5: Procedimiento de autocorrelación.

En resumen, cogiendo las ecuaciones de transformación de los parámetros y las transformaciones de escala (7.25) y como $b = e^l$, obtenemos las ecuaciones diferenciales de flujo que, teniendo en cuenta el valor pequeño de la variable l , se escriben de la forma

$$\frac{d\bar{r}}{dl} = z\bar{r} + 3\bar{u}K_4(1 - \bar{r}) , \quad (7.44)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dl} = (z - 2a)\bar{u} - 9\bar{u}^2K_4 , \quad (7.45)$$

$$\frac{d\mu}{dl} = (z - 2)\mu , \quad (7.46)$$

$$\frac{dD}{dl} = (2a + z - d)D , \quad (7.47)$$

donde hemos redefinido

$$\bar{r} = \frac{r}{\mu} , \quad (7.48)$$

$$\bar{u} = \frac{uD}{\mu^2} . \quad (7.49)$$

Este conjunto de ecuaciones de flujo (7.44)–(7.47) tiene dos puntos fijos: uno el trivial gaussiano dado por $\bar{r}^* = \bar{u}^* = 0$, y un punto fijo no trivial en $\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{6}$, $\bar{u}^* = \frac{\varepsilon}{9K_4}$, ($\varepsilon = 4 - d$). Los exponentes

críticos del sistema se pueden determinar analizando el comportamiento de los flujos del grupo de renormalización en la vecindad de cada punto fijo.

En resumen, obtenemos los mismos resultados que en la estática y además obtenemos el exponente dinámico z para el punto fijo no trivial,

$$z = 2 + o(\varepsilon^2) , \tag{7.50}$$

que depende de correcciones de orden superior.

Hemos visto, pues, que el grupo de renormalización dinámico nos da la misma información estática que el grupo de renormalización estático, y además la información dinámica no sólo del exponente z sino de la correspondiente forma escalada de la función de correlación dinámica.

Capítulo 8

Grupo de renormalización dinámico de no equilibrio: crecimiento superficial

Vamos a presentar aquí la extensión de la técnica del Grupo de Renormalización (GR) dinámico a sistemas fuera del equilibrio que obedecen ecuaciones de Langevin. Los modelos que se estudiarán aquí sirven para describir diferentes modalidades de crecimiento superficial. Existen otros sistemas físicos tratados con esta técnica, como la ecuación de Navier–Stokes con ruido aditivo, o los modelos de *Self–Organized Criticality* (criticalidad autoorganizada, o SOC).

Estos sistemas presentan cierta criticalidad dinámica y pretendemos conocer de qué clase es, estudiando el comportamiento de los mismos a tiempos y longitudes muy grandes.

Antes de empezar la explicación del grupo de renormalización dinámico, introducimos primero algunos conceptos básicos sobre crecimiento de interfases y los modelos fundamentales de tales procesos de crecimiento [BS95].

8.1. Modelos de crecimiento superficial

8.1.1. Definiciones

Presentamos en esta sección un conjunto de definiciones previas necesarias para la comprensión de las propiedades críticas del crecimiento superficial. El concepto más importante que permite describir las propiedades críticas de la interfase es la denominada **rugosidad**. Antes de presentar su definición precisa necesitamos introducir ciertas magnitudes auxiliares.

Definimos una interfase como el conjunto de partículas de un agregado con el mayor valor para la altura en su columna (ver figura 8.1). La *posición media de la interfase* o simplemente su altura media viene dada por,

$$\bar{h}(t) \equiv \sum_{i=1}^L h(i, t) , \quad (8.1)$$

donde $h(i, t)$ es el valor máximo de la altura de la columna i en el instante t . La *anchura* (rugosidad) de la interfase queda definida como la desviación cuadrática media de la magnitud anterior,

$$w(L, t) \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} . \quad (8.2)$$

Normalmente, la evolución de la rugosidad de la interfase se caracteriza por dos regímenes distintos. Inicialmente la rugosidad crece como una ley de potencias con un cierto exponente β que recibe el nombre de *exponente de crecimiento*:

$$w(L, t) \sim t^\beta , \quad (8.3)$$

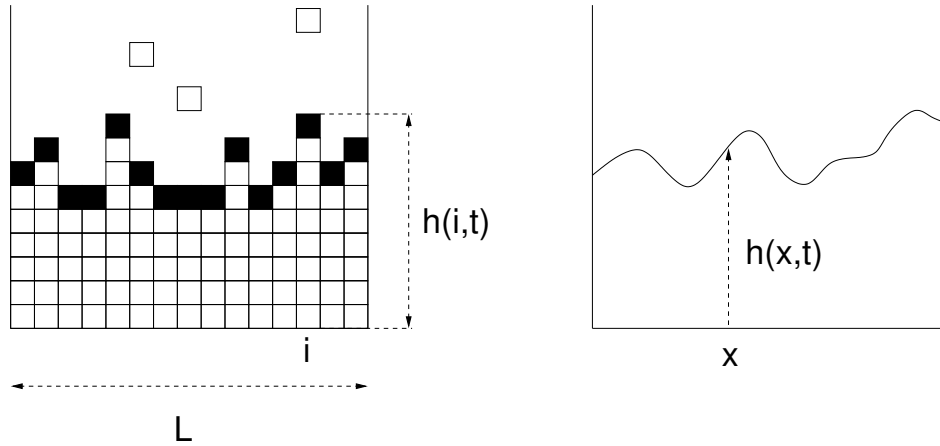


Figura 8.1: Descripción de las magnitudes principales implicadas en la descripción cuantitativa del crecimiento interfacial. La figura de la izquierda representa el proceso de crecimiento añadiendo partículas en un espacio discreto y la de la derecha representa el caso continuo o envolvente del caso anterior.

válida para tiempos menores que un cierto t_x (tiempo que separa dos regímenes). Este exponente es el que caracteriza la dinámica no estacionaria del proceso de crecimiento. Sin embargo la rugosidad cambia a otro régimen para tiempos mayores que t_x , pues ésta satura a un cierto valor w_s que depende del tamaño del sistema L , concretamente de la siguiente forma:

$$w_s(L) \sim L^\alpha, \quad (8.4)$$

donde α es un nuevo exponente llamado *exponente de rugosidad*. A su vez, el tiempo característico t_x donde se da el cambio de comportamiento del sistema también escala con el tamaño del sistema L con otro exponente,

$$t_x \sim L^z, \quad (8.5)$$

donde z es el llamado *exponente dinámico*.

Hay que señalar que el exponente z es el mismo exponente dinámico ya visto y que el exponente α no es más que el exponente χ del campo que ya conocemos pero cambiado de signo, $\alpha = -\chi$.

Hay que añadir que los fenómenos de crecimiento superficial se describen también mediante la siguiente *hipótesis de scaling* llamada de *Family-Vicsek*,

$$w(L,t) \sim L^\alpha g\left(\frac{t}{L^z}\right), \quad (8.6)$$

donde $g(a)$ es la función de escala y cuyo comportamiento asintótico es, $g(a) \sim a^\beta$ para $a \ll 1$, y $g(a) = \text{cte}$ para $a \gg 1$.

De esta expresión podemos ver que los tres exponentes definidos hasta el momento, y que caracterizan la comportamiento dinámico de la rugosidad de la interfase, no son independientes, cumpliéndose la siguiente relación entre ellos,

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (8.7)$$

Veamos ahora la aplicación de estas definiciones a problemas concretos de crecimiento.

8.1.2. Modelo de deposición al azar

El modelo de deposición al azar (RD, de *random deposition*) es el modelo de crecimiento más simple. La diferencia más importante que tiene este modelo con respecto a los que trataremos a continuación, y que marcará sus propiedades críticas, es el hecho que carece de correlaciones laterales a lo largo de

la interfase de crecimiento. En otras palabras, cada punto de la interfase crece verticalmente de forma independiente.

Es interesante tratar el proceso de crecimiento como un proceso continuo mediante la siguiente ecuación de evolución,

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F + \xi(\mathbf{x}, t) , \quad (8.8)$$

donde F describe un flujo medio de partículas que se agregan a la superficie y $\xi(\mathbf{x}, t)$ es un campo de ruido gaussiano que tiene las siguientes propiedades estadísticas:

$$\langle \xi(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 , \quad (8.9a)$$

$$\langle \xi(\mathbf{x}, t) \xi(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (8.9b)$$

Los exponentes críticos que se derivan de (8.8) son los mismos que los obtenidos mediante la simulación numérica del proceso de deposición al azar de partículas en una red, de forma que, podemos entender la ecuación (8.8) como la descripción continua del tal proceso. Concretamente no es muy difícil obtener

$$\beta = \frac{1}{2} . \quad (8.10)$$

El exponente α no está definido en este caso debido a que la interfase no llega a saturar nunca. Como veremos, esta falta de saturación de la interfase esta relacionada con el hecho que no existen correlaciones algunas entre diferentes puntos de la interfase.

8.1.3. Modelo de deposición al azar con relajación superficial

Aunque este modelo puede parecer conceptualmente muy parecido al de deposición al azar, en este caso el hecho de que la interfase pueda relajar las inhomogeneidades locales es de gran importancia, pues establece una correlación lateral en la interfase. La aparición de esta correlación es la que permite, en última instancia, que la anchura (rugosidad) de la interfase llegue a saturar. Por lo tanto en este caso tendremos un exponente α bien definido. Como ya hemos comentado anteriormente, en el caso de deposición al azar (RD) no hay correlación entre diferentes puntos de la interfase, de manera que la anchura no puede saturar. Este hecho nos indica que la saturación de la rugosidad de la interfase es un fenómeno de tamaño finito del sistema. De alguna manera, la existencia de correlación entre distintos puntos de la interfase le permite al mismo sistema apreciar la longitud del mismo.

La ecuación que describe este proceso de crecimiento en el continuo es,

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + \xi(\mathbf{x}, t) , \quad (8.11)$$

donde ν se conoce como la “tensión superficial” debido a que tiende a homogeneizar la interfase. En este caso, las propiedades estadísticas del ruido son las mismas que en el modelo anterior (8.9). La versión continua del proceso de deposición al azar con relajación superficial que describe la ecuación (8.11) se conoce como modelo de Edwards–Wilkinson (EW). Aunque se trata de un modelo lineal, es conveniente destacar ciertos puntos:

- El término de “tensión superficial” introduce las correlaciones a lo largo de la interfase. Este es un punto esencial que diferencia el modelo de deposición al azar y el modelo EW.
- La linealidad del modelo caracteriza sus exponentes críticos que son los mismos que los del modelo gaussiano estudiado en el capítulo anterior.

Realizamos a continuación un simple análisis de escala que nos permitirá obtener los exponentes críticos (que también se pueden obtenerse resolviendo exactamente el modelo).

Escalamos el sistema de la forma habitual,

$$x \rightarrow bx , \quad (8.12a)$$

$$h \rightarrow b^\alpha h , \quad (8.12b)$$

$$t \rightarrow b^z t , \quad (8.12c)$$

de manera que la ecuación (8.11) toma la forma,

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{z-2} \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + b^{(z-d-2\alpha)/2} \xi(\mathbf{x}, t) . \quad (8.13)$$

Para obtener los exponentes críticos es necesario imponer que el sistema sea invariante bajo la transformación definida anteriormente, lo que nos conduce a los siguientes exponentes,

$$z = 2 , \quad \alpha = \frac{2-d}{2} , \quad \beta = \frac{2-d}{4} , \quad (8.14)$$

de los que se desprende la existencia de una dimensión crítica en el sistema $d_c = 2$, ya que si $d > d_c$ entonces $\alpha < 0$ i la interfase relaja siempre a la interfase plana (sin rugosidad alguna). Mientras que si $d < d_c$ se obtiene un comportamiento crítico.

El hecho de que con un simple análisis de escala seamos capaces de encontrar los exponentes críticos correctos es debido a que los parámetros de la ecuación de EW (ν, D) renormalizan de forma independiente. Como veremos, este no es el caso de la ecuación *Kardar-Parisi-Zhang* (KPZ) que presentamos a continuación.

8.1.4. Modelo de deposición al azar con relajación superficial y crecimiento lateral (KPZ)

Este modelo es una generalización de la teoría lineal de EW cuando el sistema presenta un término de crecimiento lateral. Ya hemos visto que en el modelo de EW las correlaciones a lo largo de la interfase vienen dadas por el término de relajación. Ahora la correlación es generada tanto por el término de relajación como por el de crecimiento lateral. De todas formas, demostraremos más tarde que el término no lineal domina el comportamiento del sistema a tiempos grandes y, por lo tanto, será este principalmente el que contribuya a las correlaciones en la interfase.

Existen argumentos físicos [BS95] para proponer que el término no lineal que controla el crecimiento lateral debe de tener la forma $\sim (\nabla h)^2$. Así pues la ecuación lineal (8.11) pasa ahora a escribirse como

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h(\mathbf{x}, t))^2 + \xi(\mathbf{x}, t) . \quad (8.15)$$

Simulaciones numéricas en 1-dimensión dan los siguientes resultados [BS95],

$$\alpha = 0,47 \pm 0,02 , \quad (8.16a)$$

$$\beta = 0,33 \pm 0,006 , \quad (8.16b)$$

que nos hacen sospechar que las soluciones exactas pudieran ser $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/3$ y, por lo tanto, $z = 3/2$. A continuación veremos que el grupo de renormalización dinámico es capaz de obtenerlas.

Un vez introducida la ecuación KPZ, no vamos a dar más detalles sobre sus propiedades críticas debido a que esta será la ecuación que estudiaremos mediante grupo de renormalización dinámico en las siguientes secciones.

8.1.5. Modelo de crecimiento Molecular Beam Epitaxy (MBE)

Este es un modelo que se caracteriza porque la cantidad de campo $h(\mathbf{x}, t)$ se conserva durante toda la dinámica. Así pues únicamente se observan las fluctuaciones del mismo, o sea su rugosidad. La ecuación que describe este proceso de crecimiento es,

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -k \nabla^4 h(\mathbf{x}, t) + \lambda_1 \nabla^2 (\nabla h(\mathbf{x}, t))^2 + \eta_d(\mathbf{x}, t) , \quad (8.17)$$

donde las propiedades estadísticas del ruido $\eta_d(\mathbf{x}, t)$ son,

$$\langle \eta_d(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 , \quad (8.18)$$

$$\langle \eta_d(\mathbf{x}, t) \eta_d(\mathbf{x}', t') \rangle = -2D_d \nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (8.19)$$

Este ruido especial se denomina *ruido conservado* pues también contribuye localmente a la conservación del campo y no únicamente en media estadística. Para un análisis detallado de éste proceso de crecimiento véase [BS95].

Existen muchas más variantes de estos modelos, ver problemas de este capítulo, sección 8.A (página 105), o que se apliquen a otras situaciones físicas, como puede ser el fenómeno de la Criticalidad Autoorganizada (SOC).

8.2. Grupo dinámico de renormalización del modelo KPZ

8.2.1. Análisis preliminares

Empezaremos como siempre con el análisis de escala que nos permite prever ciertas características directamente relacionadas con las propiedades críticas de la ecuación KPZ sin tener que realizar de manera explícita los cálculos del grupo de renormalización dinámico. Así podremos conocer la relevancia del término no lineal, la existencia de una dimensión crítica y la imposibilidad de evaluar de forma correcta los exponentes críticos mediante este simple análisis de escala.

Cuando decimos que el término no lineal es relevante nos referimos a que su existencia puede dar lugar a exponentes críticos diferentes de los obtenidos a partir de la teoría lineal (EW). Si realizamos la transformación de escala definida en (8.12) sobre la ecuación KPZ (8.15) se obtiene,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu b^{z-2} \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} b^{\alpha+z-2} (\nabla h)^2 + b^{(z-d-2\alpha)/2} \xi . \quad (8.20)$$

Bajo esta transformación de escala, los parámetros $\{\nu, \lambda, D\}$ se transforman como

$$\nu \rightarrow b^{z-2} \nu , \quad (8.21)$$

$$\lambda \rightarrow b^{z+\alpha-2} , \quad (8.22)$$

$$D \rightarrow b^{z-d-2\alpha} D . \quad (8.23)$$

Se podría pensar que para garantizar la invarianza de escala de la ecuación (8.20) todos los términos de la ecuación deben ser independientes de b . Esta es la forma con la que hemos obtenido anteriormente los exponentes correctos para la ecuación de EW. En este caso, debido a que los parámetros no renormalizan de forma independiente, si utilizamos la misma técnica, no obtenemos los exponentes correctos.

Perturbaciones sobre el modelo lineal

Si analizamos el caso en que no existe la no linealidad ($\lambda = 0$) encontramos los exponentes de la ecuación de EW (8.14). Con dichos valores podemos ver que el parámetro λ escalaría de la siguiente forma,

$$\lambda \rightarrow b^{(2-d)/2} . \quad (8.24)$$

de donde se desprende que el término no lineal es relevante para $d < 2$ y irrelevante para $d > 2$, lo que nos indica que la dimensión crítica puede ser $d_c = 2$.

Si comparamos ahora el término de tensión superficial con el término no lineal vemos que, en el límite $b \rightarrow \infty$ el término no lineal domina sobre el de tensión superficial (si $\alpha > 0$). Esto indica que los exponentes críticos se verán claramente marcados por la no-linealidad del problema.

Invarianza galileana

La ecuación KPZ exhibe una propiedad de invarianza o simetría que nos va ayudar a encontrar una ley de scaling entre los exponentes críticos.

Escribamos la ecuación KPZ en las variables $\{h'(\mathbf{x}', t'), \mathbf{x}', t'\}$. Ahora hacemos la siguiente transformación infinitesimal,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \lambda \varepsilon t , \quad t' = t , \quad h' = h(\mathbf{x} + \lambda \varepsilon t, t) + \varepsilon \cdot \mathbf{x} , \quad (8.25)$$

que aplicamos sobre la ecuación de KPZ, para así obtener,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda \varepsilon \cdot \nabla h = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \lambda \varepsilon \cdot \nabla h + \xi(\mathbf{x} + \lambda \varepsilon t, t) + o(\varepsilon^2) , \quad (8.26)$$

como se simplifican los términos lineales en ε recuperamos la misma ecuación KPZ a ese orden. Sólo nos queda probar que el ruido también es invariante. Para probarlo basta escribir la correlación del ruido,

$$\begin{aligned} \langle \xi(\mathbf{x} + \lambda \varepsilon t) \xi(\mathbf{y} + \lambda \varepsilon s) \rangle &= 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \lambda \varepsilon(t - s)) \delta(t - s) \\ &= 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - s) . \end{aligned} \quad (8.27)$$

Si la ecuación de KPZ es invariante por una transformación que involucra a λ , esta es una propiedad que no debería alterar el grupo de renormalización dinámico, y por lo tanto $\lambda' = \lambda$, lo que conduce a la ley de scaling

$$z + \alpha = 2 , \quad (8.28)$$

y ya sólo nos queda encontrar otra relación más para tener los exponentes.

Para modelos de MBA la transformación de Galileo es un poco diferente; para la variable \mathbf{x} , tenemos

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \lambda_1 t \varepsilon \nabla^2 , \quad (8.29)$$

que conduce a otra ley de scaling,

$$z + \alpha = 4. \quad (8.30)$$

Parámetro efectivo

Si aplicamos las siguientes transformaciones sobre la ecuación de KPZ,

$$t = \frac{t'}{\nu} , \quad h = \sqrt{\frac{D}{\nu}} h' , \quad (8.31)$$

encontraremos que la ecuación KPZ se reduce a una ecuación con un único parámetro λ' ,

$$\lambda' = \frac{\lambda D^{1/2}}{\nu^{3/2}} , \quad (8.32)$$

cuya relevancia veremos al final del análisis de los resultados el grupo de renormalización dinámico.

8.3. Aplicación del grupo de renormalización dinámico

Una vez encontrados nuestros objetivos más simples, pasamos a explicitar la técnica del grupo de renormalización, si bien no incluiremos todos los detalles, que pueden quizás encontrarse en la bibliografía, y nos vamos a limitar a indicar los pasos y resultados más relevantes: las técnicas diagramáticas para la eliminación de los modos de Fourier y el estudio de las ecuaciones de flujo o de recursión de los parámetros.

La técnica del grupo de renormalización dinámico en espacio de momentos consta de los mismos pasos descritos en el análisis simple pero ahora se desarrollan de una forma más elaborada. El análisis para distancias largas de allí se convertirá ahora en la eliminación de los modos de Fourier grandes que, juntamente con las transformaciones de escala, nos permitirá obtener y estudiar las ecuaciones de flujo.

8.3.1. Eliminación o integración de los modos de Fourier altos

Las ideas fundamentales de este proceso son muy simples y ya han sido explicadas en el capítulo anterior. Empezamos por transformar por Fourier todas nuestras magnitudes considerando que el módulo del vector de onda tiene un valor máximo dado por Λ . A continuación integramos todos los vectores de onda comprendidos en el intervalo,

$$\Lambda e^{-\ell} < |k| < \Lambda, \quad (8.33)$$

donde $b = e^\ell$. A su vez promediaremos los ruidos que tengan un vector de onda en ese intervalo.

Con este procedimiento se pretende quedarnos con los \mathbf{k} cada vez más pequeños y así poder estudiar el sistema a distancias grandes (\mathbf{k} pequeño) y consecuentemente también a tiempos grandes (ω pequeño).

Usaremos la siguiente definición de transformada de Fourier para la variable $h(\mathbf{x}, t)$,

$$h(\mathbf{x}, t) = \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} h(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (8.34)$$

y de manera equivalente para el ruido. Usando esta definición, la ecuación KPZ (8.15) se reescribe en el espacio de Fourier como,

$$h(\mathbf{k}, \omega) = h^0(\mathbf{k}, \omega) + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) G_0(\mathbf{k}, \omega) \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q}) h(\mathbf{q}, \Omega) h(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \Omega), \quad (8.35)$$

donde

$$G_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\nu k^2 - i\omega}, \quad h^0(\mathbf{k}, \omega) = G_0(\mathbf{k}, \omega) \xi(\mathbf{k}, \omega). \quad (8.36)$$

La ecuación (8.35) acostumbra a escribirse en forma diagramática tal y como se detalla en la figura 8.2, donde también se establecen las equivalencias entre este tipo de representación y la formulación matemática excepto para el caso del vértice que aparece en la figura 8.2 que equivale a,

$$\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q}) \dots \quad (8.37)$$

Las cantidades que dependen del vector de onda se dividen ahora en dos conjuntos. Aquellas que tengan un valor de \mathbf{k} tal que $\Lambda e^{-\ell} < |k| < \Lambda$, que denotaremos en el diagrama con un corte y en la cantidad con el superíndice $>$. Los restantes, con un \mathbf{k} tal que $|k| < \Lambda e^{-\ell}$, conservan la notación diagramática descrita en la figura 8.2 y añadiremos el superíndice $<$ para representar las magnitudes.

En estas circunstancias la ecuación (8.35) se reescribe de diferente forma en función del valor de \mathbf{k} . En la figura 8.3 se explicita la forma que toma esta ecuación para los dos conjuntos de valores del vector \mathbf{k} .

La estrategia para eliminar los modos grandes es resolver perturbativamente en λ la ecuación descrita por el diagrama de la figura 8.3(a) y sustituir el resultado en 8.3(b). Seguidamente se promedian los ruidos contenidos en $h^{0>}$ y se integran los modos grandes que aparecen en las cantidades con superíndice $>$. En el promedio sobre los ruidos se utiliza el resultado que se detalla de forma diagramática en la figura 8.4.

Después de estos pasos, la ecuación diagramática al orden no nulo más bajo $o(\lambda^2)$ toma la forma que se especifica en la figura 8.5.

Los diagramas circulares renormalizan el parámetro ν que transforma de la siguiente forma bajo renormalización hasta el orden $o(\lambda^2)$,

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{\lambda^2 D}{\nu^3} \frac{K_d}{4d} \left(e^{-\ell(d-2)} - 1 \right) \right), \quad (8.38)$$

donde K_d es la contribución angular en d dimensiones.

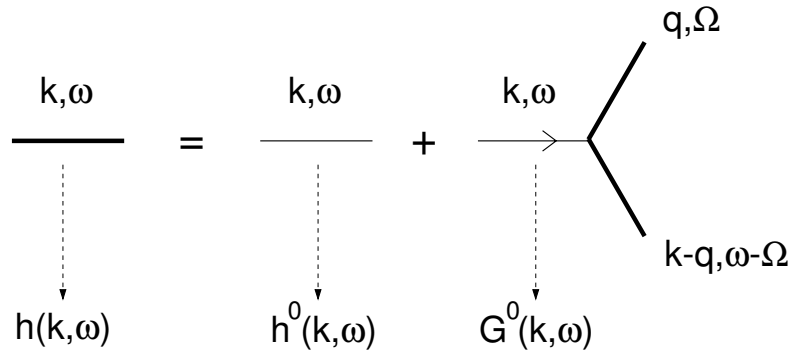


Figura 8.2: Representación diagramática de la ecuación KPZ en el espacio de Fourier (8.35).

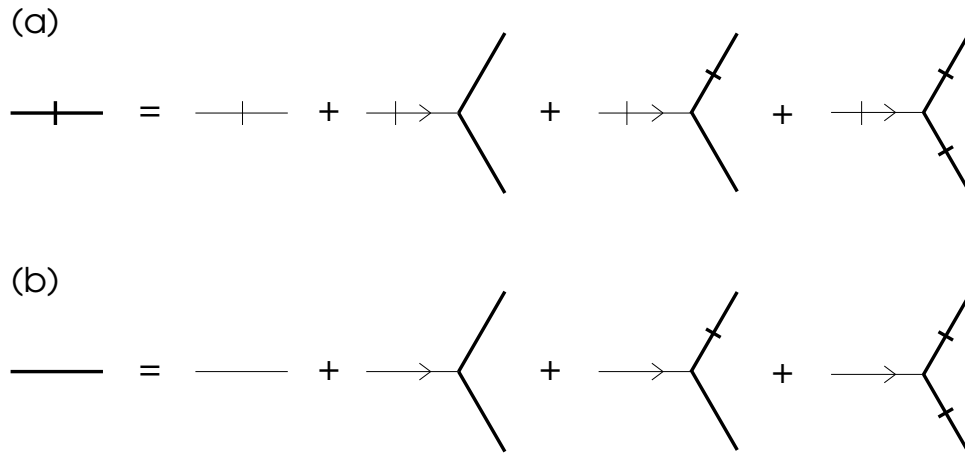


Figura 8.3: Representación diagramática de la ecuación KPZ en el espacio de Fourier para (a) el conjunto de vectores de onda tales que $\Lambda e^{-\ell} < |k| < \Lambda$ y (b) el conjunto de vectores de onda tales que $|k| < \Lambda e^{-\ell}$.

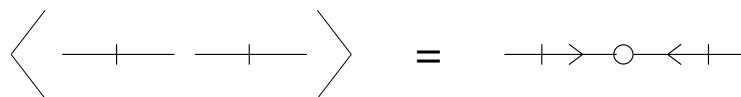
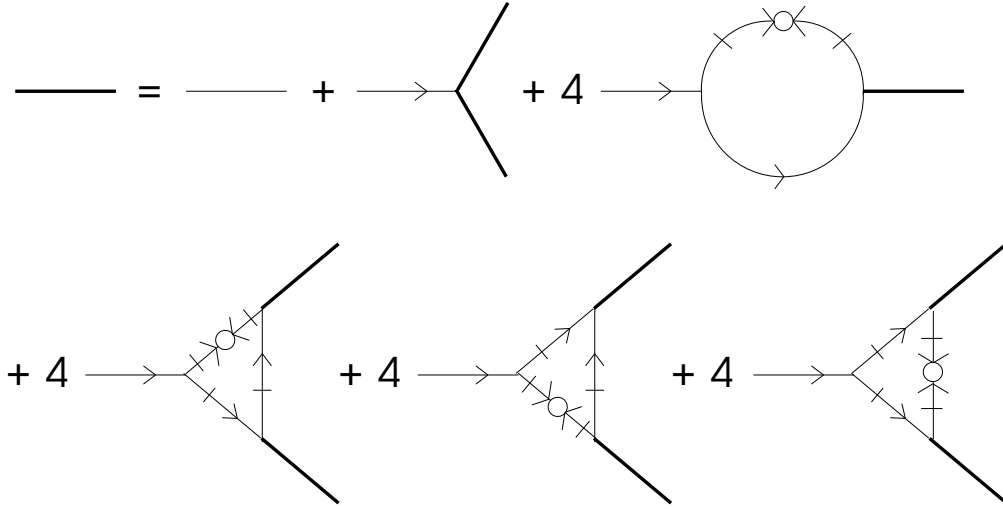
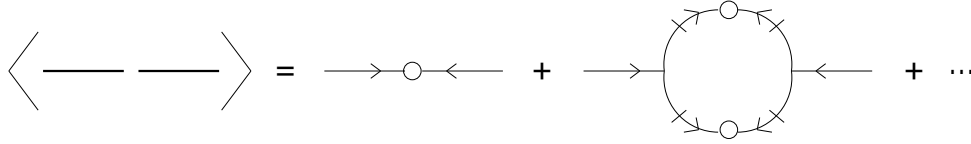


Figura 8.4: Representación diagramática del promedio sobre el ruido.

Figura 8.5: Representación diagramática de los términos a orden λ^3 .Figura 8.6: Representación diagramática del desarrollo de $\langle h^2 \rangle$ que permite renormalizar D .

Los diagramas triangulares de la figura 8.5 renormalizan λ pero su contribución es nula a este orden. Aunque no calculemos ordenes superiores en λ , podemos ver directamente que la transformación del parámetro λ es, a cualquier orden, la identidad. La razón se halla en el hecho que la ecuación KPZ es invariante bajo transformaciones infinitesimales de Galileo. Podemos pues escribir,

$$\lambda' = \lambda . \quad (8.39)$$

La renormalización de D representa un poco más de trabajo y se halla a partir del promedio estadístico de h^2 , que tiene como representación diagramática la que se detalla en la figura 8.6.

El diagrama circular de la figura 8.6 es el que contribuye a la renormalización de D , del que se obtiene,

$$D' = D \left(1 - \frac{\lambda^2 D}{\nu^3} \frac{K_d}{4(d-2)} \left(e^{-\ell(d-2)} - 1 \right) \right) . \quad (8.40)$$

Aquí se acaba el proceso de eliminación de grados de libertad con vector de onda grande.

8.3.2. Transformaciones de escala y ecuaciones de flujo

Después del proceso de eliminación nos han quedado únicamente los vectores de onda \mathbf{k} tales que $|\mathbf{k}| < \Lambda e^{-\ell}$. Para recuperar el mismo dominio de definición que teníamos en el problema original realizamos el siguiente cambio de escala en el espacio de Fourier,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= e^{\ell} \mathbf{k}^< , & \xi'(\mathbf{k}', \omega') &= e^{-\ell(d-\alpha)} \xi^<(\mathbf{k}, \omega) , \\ \omega' &= e^{z\ell} \omega , & h'(\mathbf{k}', \omega') &= e^{-\ell(z+d-\alpha)} h^<(\mathbf{k}, \omega) , \end{aligned} \quad (8.41)$$

que conduce a unas modificaciones en los parámetros ν, λ y D ,

$$\nu(\ell) = e^{(z-2)\ell} \nu' , \quad \lambda(\ell) = e^{(z-\alpha-2)\ell} \lambda' , \quad D(\ell) = e^{(z+2\alpha-d)\ell} D' . \quad (8.42)$$

Si juntamos estas ecuaciones con (8.38)–(8.40), y además consideramos transformaciones infinitesimales (desarrollamos para ℓ pequeño), entonces podemos encontrar las ecuaciones de flujo que se detallan a continuación,

$$\frac{d\nu(\ell)}{d\ell} = \left(z - 2 + \frac{\lambda^2 D}{\nu^3} \frac{2-d}{4d} K_d \right) \nu(\ell) , \quad (8.43)$$

$$\frac{d\lambda(\ell)}{d\ell} = (z + \alpha - 2) \lambda(\ell) , \quad (8.44)$$

$$\frac{dD(\ell)}{d\ell} = \left(z - d - 2\alpha + \frac{\lambda^2 D}{\nu^3} \frac{K_d}{4} \right) D(\ell) . \quad (8.45)$$

Si imponemos que las derivadas sean nulas (puntos fijos) encontramos fácilmente que los exponentes, para $d = 1$ son,

$$z = \frac{3}{2} , \quad \alpha = \frac{1}{2} , \quad (8.46)$$

que se comparan muy favorablemente con los resultados numéricos (8.16).

De las ecuaciones anteriores podemos comprobar que el parámetro efectivo λ' obedece la siguiente ecuación,

$$\frac{d\lambda'}{d\ell} = \frac{2-d}{2} \lambda' + K_d \frac{2d-3}{4d} \lambda'^3 , \quad (8.47)$$

que tiene dos puntos fijos,

$$\lambda'^* = 0 , \quad \lambda'^* = \left(\frac{2}{K_d} \right)^{1/2} , \quad (8.48)$$

y donde podemos analizar que el segundo es el dominante para dimensión $d = 1$. Aunque podríamos pensar que para $d > 2$ va a dominar el punto fijo trivial de EW, eso en la práctica no parece ocurrir debido a otras sutilezas que presenta este modelo [BS95]

8.3.3. La función de correlación

Veamos ahora para que sirven estos exponentes. Lo que en realidad se busca mediante el grupo de renormalización dinámico son las situaciones en las que el sistema manifiesta invarianzas de escala tanto espaciales como temporales. Para ello veamos que forma debería tener la función de correlación si se dieran estas invarianzas. Para ello tomaremos la función de correlación y aplicaremos lo dicho en el Capítulo 6,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t) &= \langle |h(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{0}, 0)|^2 \rangle \\ &\equiv \langle |h'(\mathbf{x}', t') - h'(\mathbf{0}, 0)|^2 \rangle \\ &= e^{-2\alpha\ell} \langle |h(e^{-\ell}\mathbf{x}, e^{-z\ell}t) - h(\mathbf{0}, 0)|^2 \rangle . \end{aligned} \quad (8.49)$$

Si ahora tomamos que $e^\ell = |x|$, entonces obtenemos la forma escalada,

$$g(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{x}|^{-2\alpha} f\left(\frac{t}{|\mathbf{x}|^z}\right) , \quad (8.50)$$

siendo $f(a)$ una función de un sólo argumento. Esta expresión se usa para ajustarla a los resultados experimentales y así obtener los exponentes numéricamente.

La extensión del grupo de renormalización dinámico a dimensiones superiores a 1 encierra múltiples dificultades y no siempre aciertos con los resultados numéricos (ver [BS95]).

Acabamos aquí nuestro curso, y dejamos que el lector interesado se remita a la literatura especializada en el tema para profundizar en el mismo.

Apéndice 8.A Problemas de crecimiento superficial

Se proponen aquí una serie de ejercicios sobre diferentes modalidades de las ecuaciones de Edwards-Wilkinson (**EW**) y Kardar-Parisi-Zhang (**KPZ**) que han sido sacados del [BS95]. El objetivo es que el alumno se familiarice con las técnicas del cambio de escala y la interpretación de las ecuaciones de flujo del grupo de renormalización.

1. Hacer las transformaciones de escala adecuadas y encontrar los exponentes críticos para el siguiente modelo lineal de *Molecular Bean Epitaxy* (**MBA**) con ruido no conservado,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -K \nabla^4 h + \eta(\mathbf{x}, t) , \quad (8.51)$$

donde el ruido gaussiano tiene una correlación,

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t) \rangle = 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (8.52)$$

2. Hacer las transformaciones de escala adecuadas y encontrar los exponentes críticos para el siguiente modelo lineal de EW con ruido conservado,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta_d(\mathbf{x}, t) , \quad (8.53)$$

donde el ruido gaussiano tiene una correlación,

$$\langle \eta_d(\mathbf{x}, t) \eta_d(\mathbf{x}', t) \rangle = -2D_d \nabla^2 \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (8.54)$$

3. Hacer las transformaciones de escala adecuadas y encontrar los exponentes críticos para el siguiente modelo lineal de **MBA** con el ruido conservado del problema 2,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -K \nabla^4 h + \eta_d(\mathbf{x}, t) . \quad (8.55)$$

4. Hacer el análisis de escala y encontrar las propiedades críticas resolviendo las ecuaciones de flujo de GRD para el modelo no lineal de **MBA** con el ruido no conservado del problema 1,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -K \nabla^4 h + \lambda_1 \nabla^2 (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t) . \quad (8.56)$$

Las ecuaciones del flujo son,

$$\frac{dK}{dl} = K \left[z - 4 + K_d \frac{\lambda_1^2 D}{K^3} \frac{(6-d)}{4d} \right] , \quad (8.57)$$

$$\frac{dD}{dl} = D [z - 2\alpha - d] , \quad (8.58)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dl} = \lambda_1 [z + \alpha - 4] , \quad (8.59)$$

donde K_d es una constante que proviene de la integración en una esfera d-dimensional. Explicar también el origen de cada una de estas ecuaciones.

5. Hacer el análisis de escala y encontrar las propiedades críticas resolviendo las ecuaciones de flujo de GRD para el modelo no lineal de **MBA** con el ruido conservado del problema 2,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -K \nabla^4 h + \lambda \nabla^2 (\nabla h)^2 + \eta_d(\mathbf{x}, t) . \quad (8.60)$$

Las ecuaciones del flujo son,

$$\frac{dK}{dl} = K \left[z - 4 + K_d \frac{\lambda^2 D_d}{K^3} \frac{(4-d)}{4d} \right] , \quad (8.61)$$

$$\frac{dD_d}{dl} = D_d [z - 2\alpha - d - 2] , \quad (8.62)$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = \lambda [z + \alpha - 4] , \quad (8.63)$$

$$(8.64)$$

donde K_d es una constante que proviene de la integración en una esfera d-dimensional. Explicar también el origen de cada una de estas ecuaciones.

Bibliografía

- [Bea92] J. J. BINNEY y ET AL. *The Theory of Critical Phenomena*. Oxford University Press (1992).
- [BS95] A. L. BARABÁSI y H. E. STANLEY. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press (1995).
- [BTW88] P. BAK, C. TANG y K. WIESENFELD. “Self-organized criticality”. *Phys. Rev. A* **38** 364 (1988).
- [Dom85] C. DOMB. “Critical phenomena: a brief historical survey”. *Contemp. Phys.* **26** 49 (1985).
- [Fis83] M. E. FISHER. “Scaling, universality and renormalization group theory”. *Lecture Notes in Physics* **186** (1983).
- [Fis98] M. E. FISHER. “Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics”. *Rev. Mod. Phys.* **70** 653 (1998).
- [FNS77] D. FOSTER, D. R. NELSON y M. J. STEPHEN. “Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid”. *Phys. Rev. A* **16** 732 (1977).
- [GMTB95] A. GIACOMETTI, A. MARITAN, F. TOIGO y J. R. BANAVAR. “Fluctuation dissipation theorem and the dynamical renormalization group”. *J. Stat. Phys.* **79** 649 (1995). Condmat/9508064.
- [GOS99] J. GARCIA-OJALVO y J. M. SANCHO. *Noise in spatially extended systems*. Springer Verlag (1999).
- [GSMS63] J. D. GUNTON, M. SAN MIGUEL y P. S. SHANI. *The dynamics of first-order phase transitions in Phase Transitions and Critical Phenomena*, tomo 8. Academic Press (New York) (1963).
- [HH77] P. C. HOHENBERG y B. I. HALPERIN. “Theory of dynamic critical phenomena”. *Rev. Mod. Phys.* **49** 435 (1977).
- [KPZ86] M. KARDAR, G. PARISI y Y. ZHANG. “Dynamic scaling of growing interfaces”. *Phys. Rev. Lett.* **56** 889 (1986).
- [Ma76] S. K. MA. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Frontiers in Physics. Benjamin/Cummings PC (1976).
- [MK78] H. J. MARIS y L. P. KADANOFF. “Teaching the renormalization group”. *Am. J. Phys.* **46** 652 (1978).
- [NvL73] T. NIEMEIJER y J. M. J. VAN LEEWEN. “Wilson theory for spin systems on a triangular lattice”. *Phys. Rev. Lett.* **31** 1411 (1973).
- [PB89] M. PLISCHKE y B. BERGERSEN. *Equilibrium Statistical Physics*. Prentice Hall (1989).
- [Rei98] L. E. REICHL. *A Modern course in statistical physics*. Wiley cop., segunda edición (1998).

- [Sta71] H. E. STANLEY. *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*. Oxford U. P. (1971).
- [Sta99] H. E. STANLEY. “Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena”. *Rev. Mod. Phys.* **71** S358 (1999).
- [Suz79] M. SUZUKI. *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*. Ed. Ch. P. Enz. Lecture Notes in Physics. Springer Verlag (1979).
- [Tho88] C. J. THOMPSON. *Classical Equilibrium Statistical Mechanics*. Clarendon Press, Oxford (1988).
- [WK74] K. G. WILSON y J. KOGUT. “The renormalization group and the small ϵ expansion”. *Phys. Rep.* **12** 75 (1974).
- [WS81] T. A. WITTEN y L. M. SANDER. “Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon”. *Phys. Rev. Lett.* **47** 1400 (1981).

Índice alfabético

- Andrews, 1–3
- aproximación
 - de Maris–Kadanoff, 44
 - de Thompson, 45
- autocorrelacionar, 93
- Bak, 10
- Berlin, 7
- Bethe, 5
- blocking, 8, 19, 20, 29, 61
 - dinámico, 84
 - espacio de momentos, 53
 - modelo de Ising red triangular, 46
 - red cuadrada, 19
- Bragg, 1, 4
- coexistencia
 - curva de, 2
- colapso
 - de la ecuación de estado, 16, 18
- compresibilidad, 4
 - isotérmica, 3
- correlación
 - función de, 1, 4, 25, 88, 104
 - función espacio-temporal de, 83
 - longitud de, 4
- crítica
 - dimensión, 59
 - opalescencia, 3
 - temperatura, 2
- crítico, 1
 - punto, 1, 2, 9
- critica
 - dinámica, 87
- critical scaling down, 81
- Curie, 1, 3
 - constante de, 3
 - ley de Curie–Weiss, 3
 - punto de, 2
 - temperatura de, 3, 5
- decimación, 8, 19, 29
 - Ising antiferromagnético, 34
 - modelo esférico, 39
- diagrama, 61
 - a ocho patas, 63
 - conectado, 65
 - de cuatro patas, 61
- dimensión
 - anómala, 60
 - crítica, 59
- dinámica
 - de no equilibrio, 95
 - espacio de momentos, 87
 - espacio real, 81
- dinámicos
 - fenómenos, 1
- Domb, 7, 16
- emergencia, 25
- equilibrio, 15
- escala
 - hipótesis de, 7
- exponente
 - de crecimiento, 95
 - de rugosidad, 96
 - del campo, 84
 - dinámico, 81, 84, 88, 96
 - dominante, 22
- exponentes
 - críticos, 6, 7, 16, 17, 58
 - dinámicos, 11, 81
- factor
 - de contracción lineal, 19
- Family–Vicsek, 96
- fenómenos dinámicos, 1
- ferromagnetismo, 1–3, 6, 16, 18
- Fisher, 16
 - ley de, 27
- Flory, 10
- Fourier
 - transformada de, 56, **69**
- función
 - de correlación, 4, 25, **69**, 88, 104
 - de correlación espacio-temporal, 83
 - de estructura, 69, 70, 88
 - de partición, 8
 - de scaling, 7, 18
 - homogénea generalizada, 16, 26

- peso, 54
- gas
 - de Van der Waals, **2**
 - ideal, 2
- Gell-Man, 8
- generador, 70
- Griffiths, 7
 - ecuación de estado de, 7
 - igualdad de, 18
- Heisenberg, 6
 - modelo de, 24
- herência, 25
- Hunter, 7
- igualdad
 - de Griffiths, 18
 - de Rushbrooke, 18
- interfase, 95
 - anchura de, 95
- Ising, 6
 - ferromagnético, 30
 - modelo antiferromagnético, 34
 - modelo d-dimensional, 19
 - modelo de, 6, 24
 - red cuadrada, 42
 - red triangular, 45
- Kac, 7
- Kadanoff, 8, 16, 18, 44, 53
 - el método de, 18
- Kramers, 6
- Landau, 1, 5, 9
 - teoría de, 5
- Langevin, 1, 3, 87
 - ecuación de, 82, 87
 - función de, 3
- Lenz, 6
- ley
 - de Curie-Weiss, 3
 - de estados correspondientes, 3
 - de Fisher, 27
 - de Gutenberg-Richter, 10
 - de hyperscaling, 20
 - de scaling, 16, 17
- longitud
 - de correlación, 19, 22
- Low, 8
- magnetización, 17
 - espontánea, 3, 6
- Maris, 44
- mezcla binária, 1, 4
- modelo
 - criticalidad autoorganizada, 10, 95
 - de agregación difusión limitada, 10
 - de crecimiento MBE, 98
 - de crecimiento superficial, 95
 - de deposición al azar, 96
 - de deposición al azar con relajación, 97
 - de Edward-Wilkinson, 105
 - de Edwards-Wilkinson, 97
 - de Heisenberg, 24
 - de Ising, 6, 24
 - de Ising antiferromagnético, 34
 - de Ising ferromagnético, 30
 - de Ising red cuadrada, 42
 - de Ising red triangular, 45
 - de Potts, 23
 - del camino autoevitante, 9, 25
 - esférico, 7, 25, **39**
 - ferromagnético, 1
 - gaussiano, **54**
 - gaussiano dinámico, 87
 - Ginzburg-Landau-Wilson, 54, **58**
 - Ginzburg-Landau-Wilson dinámico, 89
 - Ising, 19
 - KPZ, 10, 98, 99
 - molecular bean epitaxy, 105
 - n-vector, 23
 - XY, 24
- Navier-Stokes
 - ecuación, 95
- nuevas criticalidades, 1, 9
- Onsager
 - la revolución de, 1, 6
 - reconciliación con Van der Waals, 1, 7
- orden
 - corto alcance, 5
 - largo alcance, 5
- Ornstein-Zernike, 1, 4
- parámetro
 - de orden, 1, 4
- parámetros
 - de expansión, 9
 - irrelevantes, 9
- Patashinskii, 7
- Peierls, 6
- período clásico, 1
- percolación, 10, 73
 - bond, 73
 - bond en rez cuadrada, 76
 - site, 73
 - una dimensión, 74

- Peterman, 8
- Pokrovskii, 7
- punto
 - crítico, 1, 2, 9, 23
 - de Curie, 2
 - fijo, 9, 15, 20, 23
- reducción
 - de grados de libertad, 19
- relevancia, 22
- renormalización, 15, 16, 18
 - el grupo de, 18
 - espacio de momentos, 8, **53**
 - espacio real, 8, **29**
 - grupo de, 1, 8, 15, 20
 - grupo dinámico de no equilibrio, 95
 - grupo dinámico, espacio de momentos, 81, 87
 - grupo en percolación, 73
 - grupo estático, 15
 - modelo de Ising antiferromagnético, 34
 - modelo de Ising red triangular, 46
 - modelo gaussiano, 56
 - modelo Ginzburg-Landau-Wilson, 59
 - modelo KPZ, 99
- respectabilidad, 1, 8
- ruido
 - conservado, 99
- Rushbrooke
 - igualdad de, 18
- Sander, 10
- scaling, 1, 15, 16, 73
 - dinámico, 81
 - función de, 7, 18
 - hipótesis de, 18, 25
 - hipotesis de Family-Vicsek, 96
 - ley de, 16, 17
 - relación de, 7
- simetría
 - interna, 15
- Stockmayer, 10
- Stueckelberg, 8
- superficial
 - crecimiento, 95
- Tang, 10
- temperatura
 - crítica, 2
 - de Curie, 3, 5
- teorema
 - de Wick, 63, 69, 70, **71**
- Thompson
 - aproximación de, 45
- transición, 15
- trascendental
 - ecuación, 3
- Uhlenbeck, 7, 8
- universalidad, 5, 6, 15, 16, **23**, 69, 73
 - clases de, 6, 8, 9, 23
 - clases de, ejemplos, 23
 - clases dinámicas de, 81
 - hipótesis de, 1
 - no clásica, 7, 8
- Van der Waals, 1
 - gas de, 2
 - punto crítico, 2
 - reconciliación con Onsager, 1, 7
- Wannier, 6
- Weiss, 1, 3, 5
 - ecuación de estado, 7
 - ley de Curie-Weiss, 3
- Wick
 - teorema de, 63, 69, 70, **71**
- Widom, 7, 16
- Wiesenfeld, 10
- Williams, 1, 4
- Wilson, 1, 8, 9, 16, 69
- Witten, 10
- Yang, 6

*Amigo lector,
si has llegado hasta aquí,
y has sacado algún provecho,
felicítate,
yo sólo te he señalado el camino.*