

# Apuntes de Cálculo II

Javier Llorente

Junio 2005



# Índice general

<b>1. Funciones de varias variables</b>	<b>7</b>
1.1. Conjuntos asociados a funciones . . . . .	8
1.1.1. Dominio de una función . . . . .	8
1.1.2. Imagen de una función . . . . .	8
1.1.3. Gráfica de una función . . . . .	8
1.1.4. Conjuntos de nivel . . . . .	8
1.1.5. Ejemplos . . . . .	8
1.2. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico . . . . .	9
1.3. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial normado . . . . .	10
1.4. Topología de conjuntos en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
1.5. Límites y continuidad . . . . .	13
1.5.1. Definición $\epsilon - \delta$ del límite . . . . .	13
1.5.2. Continuidad de funciones . . . . .	13
1.5.3. Propiedades de los límites y de las funciones continuas . . . . .	14
1.5.4. Existencia de límites . . . . .	16
1.5.5. Cálculo de límites . . . . .	16
1.6. Propiedades topológicas de las funciones continuas . . . . .	18
<b>2. Diferenciabilidad y derivadas parciales</b>	<b>19</b>
2.1. Diferencial de una función en un punto . . . . .	19
2.2. Matriz de la aplicación lineal $df$ . . . . .	20
2.3. Propiedades de la diferenciación . . . . .	22
2.3.1. Suma de funciones diferenciables . . . . .	22
2.3.2. Regla de Leibniz . . . . .	22
2.3.3. Regla de la cadena . . . . .	22
2.4. Teorema de Euler . . . . .	23
2.5. Funciones de clase $C^1$ . . . . .	23
2.6. Derivadas parciales y diferenciales sucesivas . . . . .	23
2.7. Derivadas direccionales . . . . .	25
2.7.1. Interpretación geométrica del gradiente . . . . .	25
2.8. Plano tangente a superficies . . . . .	25

2.8.1.	Ecuación del plano tangente a $L_c(f)$ . . . . .	26
2.8.2.	Plano tangente a la gráfica de una función . . . . .	26
2.9.	Divergencia y rotacional . . . . .	27
2.9.1.	Teoremas sobre la divergencia y el rotacional . . . . .	27
<b>3.</b>	<b>Fórmula de Taylor y extremos</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1.	Fórmula de Taylor . . . . .	30
3.2.	Extremos de funciones . . . . .	31
3.2.1.	Clasificación de puntos críticos . . . . .	32
3.2.2.	Extremos en puntos frontera . . . . .	33
3.3.	Función inversa . . . . .	34
3.3.1.	Invertibilidad local . . . . .	34
3.3.2.	Teorema de la función inversa . . . . .	35
3.4.	Funciones implícitas . . . . .	36
3.4.1.	Teorema de la función implícita . . . . .	36
3.5.	Subvariedades diferenciables . . . . .	37
3.5.1.	Vectores tangentes y normales a subvariedades . . . . .	38
3.6.	Extremos condicionados . . . . .	39
3.6.1.	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	39
<b>4.</b>	<b>Integrales múltiples</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1.	Integral doble sobre un rectángulo . . . . .	41
4.1.1.	Teorema de Lebesgue para integrales de Riemann . . . . .	42
4.2.	Propiedades de la integral . . . . .	43
4.3.	Teorema de Fubini . . . . .	44
4.3.1.	Interpretación geométrica . . . . .	45
4.4.	Integración sobre conjuntos generales . . . . .	45
4.4.1.	Regiones de tipo I . . . . .	46
4.4.2.	Regiones de tipo II . . . . .	46
4.4.3.	Regiones de tipo III . . . . .	46
4.5.	Integrales múltiples . . . . .	47
4.5.1.	Teorema general de Fubini . . . . .	47
4.6.	Integrales triples . . . . .	48
4.6.1.	Tipos de regiones en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	48
4.7.	Cambio de variables . . . . .	49
4.7.1.	Coordenadas polares . . . . .	49
4.7.2.	Coordenadas cilíndricas . . . . .	50
4.7.3.	Coordenadas esféricas . . . . .	50
4.8.	Aplicaciones de la integral . . . . .	50
4.8.1.	Centro de masa . . . . .	50
4.8.2.	Momento de inercia . . . . .	51

4.8.3. Promedio integral . . . . .	51
<b>5. Integrales de línea y superficie</b>	<b>53</b>
5.1. Longitud de una curva paramétrica . . . . .	53
5.1.1. Reparametrización de curvas . . . . .	54
5.2. Integrales sobre curvas paramétricas . . . . .	54
5.2.1. Integral de trayectoria para campos escalares . . . . .	54
5.2.2. Integral de línea . . . . .	55
5.3. Campos conservativos . . . . .	56
5.4. Teorema de Green en el plano . . . . .	59
5.4.1. Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas	60
5.5. Integrales de superficie . . . . .	60
5.5.1. Integración de campos escalares sobre superficies . . . . .	61
5.5.2. Integración de campos vectoriales sobre superficies . . . . .	61
5.5.3. Teoremas de Stokes y Gauss . . . . .	62



# Capítulo 1

## Funciones de varias variables

Durante este curso el conjunto que se estudiará será  $\mathbb{R}^n$ , definido como:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})}_n$$

Es decir,  $\mathbb{R}^n$  es el producto cartesiano de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$   $n$  veces. También se puede describir este conjunto como el de las  $n$ -uplas de componentes reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n\}$$

Son también importantes las funciones de un cierto  $\mathbb{R}^n$  en otro  $\mathbb{R}^m$ , esto es, las funciones de la forma:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Donde si  $\vec{f}$  va de un  $\mathbb{R}^n$  en un  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \neq 1$  se tiene:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

**Ejemplo** Sea  $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 + x_3 \\ x_1 + \sqrt{x_2 + x_3^2} \end{pmatrix}$$

Esto es un ejemplo de una función de 3 variables en el conjunto  $\mathbb{R}^2$

## 1.1. Conjuntos asociados a funciones

Se verán ahora algunos conjuntos importantes a la hora de estudiar estas funciones de varias variables

### 1.1.1. Dominio de una función

Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  se define el dominio de dicha función y se denotará por  $\mathcal{D}(f)$  al conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  para los cuales está definida la función, es decir, el conjunto:

$$\mathcal{D}(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists f(\vec{x})\} \subset \mathbb{R}^n$$

Para funciones vectoriales, es decir, funciones del tipo  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  se define el dominio como la intersección de los dominios de cada una de las funciones que definen  $\vec{f}$ , es decir:

$$\mathcal{D}(\vec{f}) = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{D}(f_i)$$

### 1.1.2. Imagen de una función

Dada una función  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  llamaremos imagen o rango de  $\vec{f}$  y lo denotaremos por  $\mathcal{R}(\vec{f})$  al conjunto:

$$\mathcal{R}(\vec{f}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \mathcal{D}(\vec{f})\} \subset \mathbb{R}^m$$

### 1.1.3. Gráfica de una función

Dada  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  llamaremos grafo o gráfica de  $\vec{f}$  al conjunto:

$$\mathcal{G}(\vec{f}) = \{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \mid \vec{x} \in \mathcal{D}(\vec{f})\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

### 1.1.4. Conjuntos de nivel

Dada una función  $f(x_1, \dots, x_n)$  y  $c \in \mathbb{R}$ , llamaremos conjunto de nivel de valor  $c$  para la función  $f$  a un subconjunto del espacio inicial definido como:

$$L_c(f) = \{\vec{x} \in \mathcal{D}(f) \mid f(\vec{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

### 1.1.5. Ejemplos

A continuación se verán algunos ejemplos de estos conjuntos en ciertas funciones.

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Sus conjuntos asociados serían:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} \\ \mathcal{R}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \forall x \in \mathcal{D}(f)\} = \mathbb{R}^+ - \{0\} \\ \mathcal{G}(f) &= \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}(f)\} = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

Sus conjuntos asociados serán:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\vec{f}) &= \mathbb{R} \\ \mathcal{R}(\vec{f}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos(t), y = \text{sen}(t)\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{G}(\vec{f}) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = t, x_2 = \cos(t), x_3 = \text{sen}(t)\}\end{aligned}$$

3. Conjuntos de nivel de la función definida por:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2\end{aligned}$$

Se tienen los casos siguientes:

$$\begin{aligned}\forall c > 0 &\Rightarrow L_c(f) = \{\text{circunferencias de radio } \sqrt{c}\} \\ \forall c = 0 &\Rightarrow L_c(f) = \{(0, 0)\} \\ \forall c < 0 &\Rightarrow L_c(f) = \emptyset\end{aligned}$$

## 1.2. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

**Definición:** Un espacio métrico es un conjunto  $X$  dotado con una noción de distancia. Una distancia es una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$  (Desigualdad triangular)

**Definición:** Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial provisto de una aplicación  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- i)  $\forall \vec{v} \in V \Rightarrow \|\vec{v}\| \geq 0; \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$
- iii)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Sea  $V$  un espacio vectorial normado. Se define la distancia en  $V$  como:  
 $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{w} - \vec{v}\|$

**Proposición:** Todo espacio vectorial normado es un espacio métrico, tomando como distancia la anterior definición usando la norma en  $V$ . A partir de aquí es fácil probar las siguientes igualdades:

- $\forall \vec{v} \in V \Rightarrow \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

### 1.3. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial normado

Puesto que los espacios vectoriales normados son un caso de los espacios métricos, se tiene que definiendo una norma en  $\mathbb{R}^n$ , este es un espacio vectorial normado. Definiremos la norma en  $\mathbb{R}^n$  utilizando el producto escalar.

$$\text{Sean } \left. \begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$\text{Entonces } \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**Lema: Desigualdad de Cauchy-Schwartz** Esta desigualdad establece que:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

**Demostración:** Definiremos una función  $g(t)$  de la cual hallaremos sus mínimos

- i)  $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 0 \leq 0$
- ii)  $\forall \vec{y} \neq \vec{0} \Rightarrow g(t) = (\vec{x} + t\vec{y}) \cdot (\vec{x} + t\vec{y}) = \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2$

Desarrollando la función  $g(t)$  y derivándola se tiene:

$$g(t) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y}t + \vec{y} \cdot \vec{y}t^2 \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} g'(t) = 2\vec{x} \cdot \vec{y} + 2t\vec{y} \cdot \vec{y} \Rightarrow t_0 = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \\ g''(t) = 2\vec{y} \cdot \vec{y} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_0 = \min g(t)$$

De aquí, sustituyendo  $t_0$  en  $g(t)$  se tiene:

$$\begin{aligned} g(t_0) = \vec{x} \cdot \vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \geq 0 \\ (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y}) \Leftrightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

Esta desigualdad se satura en caso de que  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  sean linealmente dependientes.

**Ángulo entre dos vectores** El ángulo que forman dos vectores en  $\mathbb{R}^n$  se puede definir utilizando el producto escalar como:

$$\cos \theta_{(x,y)} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

**Propiedades de la norma** Las normas en  $\mathbb{R}^n$  tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} i) \quad \|\vec{x}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq 0; \quad \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \\ ii) \quad \|\lambda \vec{x}\| &= |\lambda| \|\vec{x}\| \\ iii) \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

## 1.4. Topología de conjuntos en $\mathbb{R}^n$

La topología se encarga de describir los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  dependiendo del lugar que ocupan los puntos. Así podemos definir los siguientes conceptos.

**Definición: Bola abierta** Dado un punto  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  y un número real  $r > 0$  se llama bola abierta de centro  $\vec{x}$  y radio  $r$  al conjunto:

$$B_r(\vec{x}) \equiv \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\| < r\}$$

**Definición: Bola abierta perforada** Se llama bola abierta perforada de centro  $\vec{x}$  y radio  $r > 0$  al conjunto:

$$B'_r(\vec{x}) = B_r(\vec{x}) - \{\vec{x}\}$$

Es decir, es una bola abierta de la cual se excluye su centro.

**Definición:** Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

- $\vec{x}$  es punto interior de  $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_r(\vec{x}) \subset A$
- $\vec{x}$  es punto exterior de  $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_r(\vec{x}) \subset (\mathbb{R}^n - A)$
- $\vec{x}$  es punto frontera de  $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_r(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset; B_r(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset$

Existen varios conjuntos según la posición relativa de  $\vec{x}$ :

- $\overset{\circ}{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \text{ es punto interior de } A\}$
- $ext A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \text{ es punto exterior de } A\}$
- $\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \text{ es punto frontera de } A\}$

Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

- i)  $\overset{\circ}{A} \cup ext A \cup \partial A = \mathbb{R}^n$
- ii)  $\overset{\circ}{A} \cap ext A = \overset{\circ}{A} \cap \partial A = ext A \cap \partial A = \emptyset$

**Definición: Punto aislado** Se dice que  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es punto aislado de  $A$  cuando  $\forall r > 0 \exists B_r(\vec{x}) \mid B_r(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\} \forall \vec{x} \in A$

**Definición: Punto de acumulación** Se dice que  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es punto de acumulación de  $A \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall r > 0 \exists B'_r(\vec{x}) \mid B'_r(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset$ . Es decir, si podemos encontrar puntos de  $A$  tan cerca como queramos del punto  $\vec{x}$ .

**Definición: Conjunto abierto** Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es abierto cuando todos sus puntos son interiores, es decir, si  $A = \overset{\circ}{A}$ . Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

- i)  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$  son abiertos
- ii) Dada una colección de abiertos  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  es abierto
- iii) Dados  $A$  y  $B$  abiertos  $\Rightarrow A \cap B$  es abierto

**Definición: Conjunto cerrado** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si su conjunto complementario,  $\mathbb{R}^n - A$  es abierto. Los conjuntos cerrados tienen las siguientes propiedades:

- i)  $\mathbb{R}^n, \emptyset$  son cerrados y abiertos al mismo tiempo
- ii) Dada una colección de cerrados  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  es cerrado
- iii) Dados  $F$  y  $G$  cerrados, entonces  $F \cup G$  es cerrado

**Ejemplo** En  $\mathbb{R}$ :  $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$

**Definición:** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  se llama cierre de  $A$  ( $\bar{A}$ ) al conjunto  $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ .  $A$  es cerrado si y sólo si  $A = \bar{A}$ .

**Definición:** Un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  se define como acotado si:

$$K \text{ acotado} \Leftrightarrow \exists M > 0 \mid \forall \vec{x} \in K \Rightarrow \|\vec{x}\| \leq M$$

**Definición:** Un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  se dice compacto si es cerrado y acotado.

## 1.5. Límites y continuidad

En esta sección se estudiarán los límites y la continuidad de las funciones de varias variables.

### 1.5.1. Definición $\epsilon - \delta$ del límite

Dada una función  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un punto  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  que sea punto de acumulación de  $\mathcal{D}(\vec{f})$  se dice que:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon$$

Es decir, dado un grado de proximidad  $\epsilon > 0$  es posible encontrar un  $\delta > 0$  de forma que si los puntos  $\vec{x} \in \mathcal{D}(\vec{f})$  distan de  $\vec{a}$  menos que  $\delta$ , entonces los puntos  $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathcal{R}(\vec{f})$  distarán de  $\vec{b}$  menos que  $\epsilon$

### 1.5.2. Continuidad de funciones

A partir de la definición de límite por el criterio  $\epsilon$ - $\delta$  anterior podemos definir el concepto de continuidad de una función en un punto  $\vec{a}$  de su dominio:

**Definición: Función continua** Dada una función  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un punto  $\vec{a} \in \mathcal{D}(\vec{f})$  diremos que  $f$  es continua en  $\vec{a}$  sí y sólo sí:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})\| < \epsilon$$

es decir, si:

$$\forall B_{\epsilon}(\vec{b}) \exists B_{\delta(\epsilon)}(\vec{a}) \mid \vec{f}(B_{\delta(\epsilon)}(\vec{a})) \subset B_{\epsilon}(\vec{f}(\vec{a}))$$

Es decir, dada una bola abierta de radio  $\epsilon$  y centrada en  $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ , existirá otra bola abierta de radio  $\delta$  y centrada en  $\vec{a}$  que contenga a los elementos cuyas imágenes pertenecen a la bola anterior.

Si  $f$  es una función continua en un punto  $\vec{a}$  hay varias posibilidades: La primera que  $\vec{a}$  sea punto aislado de  $\mathcal{D}(f)$  o bien que sea punto de acumulación, en cuyo caso se tiene que  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ . Por otro lado, si  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{f}(\vec{a})$  se dirá que  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $\vec{x} = \vec{a}$ , que se evitará definiendo una nueva función dada por:

$$\vec{f}_2(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{f}_1(\vec{x}) & \forall \vec{x} \neq \vec{a} \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) & \forall \vec{x} = \vec{a} \end{cases}$$

### 1.5.3. Propiedades de los límites y de las funciones continuas

Todas estas propiedades son demostrables aplicando la definición  $\epsilon$ - $\delta$  del límite.

**Propiedad 1:** Dadas dos funciones  $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con límites  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  en  $\vec{x} = \vec{a}$  se tiene:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

Puede que la suma de dos funciones discontinuas en un cierto  $\vec{x}$  sea continua para ese valor, sin embargo, suma de funciones continuas será siempre continua y suma de una función continua con una discontinua siempre será discontinua.

**Propiedad 2:** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ambas tienen límite en un cierto  $\vec{x} = \vec{a}$  y valen  $b_1$  y  $b_2$ , entonces se tiene:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = b_1 \cdot b_2$$

El producto de funciones continuas es siempre una función continua. Puede ocurrir que el producto de una función continua por una discontinua sea continua o bien que el producto de dos funciones discontinuas sea continua.

**Propiedad 3:** Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\vec{a}) = b \neq 0$  se tiene:

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{f(\vec{x})} = \frac{1}{b}$$

Por otro lado, dadas  $f, g$  continuas en  $\vec{a}$  tal que  $g(\vec{a}) \neq 0$  entonces se tiene:

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left( h(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right)$$

luego  $h(\vec{x})$  es continua en  $\vec{x} = \vec{a}$

**Propiedad 4:** Dada una función vectorial de  $m$  componentes escalares  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se tiene:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_i(\vec{x}) = b_i \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

Una función vectorial es continua si y sólo si lo son cada una de sus funciones componentes  $f_i$

**Propiedad 5:** Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $f$  es continua en  $\vec{x} = \vec{a}$ ,  $f(\vec{a}) > 0 (< 0)$  y  $\vec{a}$  es punto de acumulación de  $\mathcal{D}(f)$ , entonces:

$$\exists r > 0 \mid f(\vec{x}) > 0 (< 0) \forall \vec{x} \in B_r(\vec{a}) \cap \mathcal{D}(f)$$

**Propiedad 6:** Dadas tres funciones  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\exists r > 0$  tal que  $f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$  para todo  $\vec{x} \in B_r(\vec{a})$  y además  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = b$  se tiene:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} h(\vec{x}) = b$$

Este resultado se conoce como criterio de comparación.

**Propiedad 7:** Dadas  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = 0$  y además existen dos números reales  $M, r > 0$  tales que  $|g(\vec{x})| \leq M \quad \forall \vec{x} \in B_r(\vec{a}) \cap \mathcal{D}(f)$ , entonces se tiene:

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = 0$$

Es decir, el límite de una función nula en  $\vec{x} = \vec{a}$  por una función acotada es nulo.

**Propiedad 8:** Dadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  y  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se define  $g \circ f$  como  $g(f(\vec{x}))$ . Supongamos que se cumple:

- i)  $\vec{a}$  es punto de acumulación de  $\mathcal{D}(f)$  y  $f(\vec{x})$  es continua en  $\vec{a}$
- ii)  $f(\vec{a})$  es punto de acumulación de  $\mathcal{D}(g)$  y  $g(\vec{x})$  es continua en  $\vec{a}$
- iii)  $\vec{a}$  es punto de acumulación de  $\mathcal{D}(g \circ f)$  y  $g \circ f$  es continua en  $\vec{x} = \vec{a}$

Entonces se tiene:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(f(\vec{x})) = g(f(\vec{a}))$$

La función resultante de la composición de dos funciones continuas es continua en general.

#### 1.5.4. Existencia de límites

**Definición: Límite a lo largo de curvas.** Sea  $f(\vec{x})$  una función escalar de  $n$  variables y sea  $\vec{a} \in \mathcal{D}(f)$ . Sea  $\Phi(t)$  una curva continua en  $\mathbb{R}^n$  ( $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) tal que  $\Phi(0) = \vec{a}$  y  $\exists r > 0$  tal que  $f(B'_r(0)) = (-r, 0) \cup (0, r) \subset \mathcal{D}(f)$ . Entonces llamamos límite de  $f(\vec{x})$  a lo largo de la curva  $\vec{\Phi}(t)$  al límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\Phi(t))$$

Para todo  $\vec{a}$  perteneciente al conjunto de puntos frontera del dominio de  $f$  se tiene que el límite sólo está definido en una dirección de la curva. Si a lo largo de varias curvas el límite no coincide, se dice que no existe el límite. Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo:** Sea la función

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

y la familia de rectas que pasan por el origen, dadas por  $y = mx$ . Entonces, a lo largo de las rectas, el límite será:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + mx}{x - mx} = \frac{(1 + m)x}{(1 - m)x} = \frac{1 + m}{1 - m}$$

El límite depende por tanto de la recta que se tome y se dice que no existe el límite. Por otro lado, aunque los límites a lo largo de todas las rectas coincidan, es posible que exista otra familia de curvas a través de las cuales el límite no sea el mismo, por tanto es imposible determinar el límite por este procedimiento.

#### 1.5.5. Cálculo de límites

Veamos ahora como se calculan los límites de funciones de varias variables. Será necesario el teorema de Taylor visto en Cálculo I y el concepto de infinitésimo.

**Definición: Infinitésimo** Dadas dos funciones  $f, g$  con  $g(\vec{x}) \geq 0$  se dice que  $f(\vec{x})$  es un infinitésimo de  $g(\vec{x})$  y se escribe  $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x}))$  si se cumple:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = 0$$

Veamos ahora algunos ejemplos del cálculo de límites de funciones de varias variables.

**Ejemplo** Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - \alpha - \beta xy}{\gamma + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

Se hallará primero (si es que existe) la función en el punto dado, en este caso el  $(0, 0)$ :

$$f(0, 0) = \frac{1 - \alpha}{\gamma} \Rightarrow \forall \gamma \neq 0 \text{ la función es continua}$$

Veamos ahora el caso en el que  $\gamma = 0$ . La única posibilidad de que la función sea continua es que se trate de una indeterminación del tipo  $0/0$ , en cuyo caso se tiene  $\alpha = 1$ , luego:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1 - \beta xy}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

Los desarrollos de Taylor para la exponencial y el seno son:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Por tanto, el límite a calcular será:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + xy + o(|xy|) - 1 - \beta xy}{xy + x \cdot o(|y|) + y \cdot o(|x|) + o(|x|) \cdot o(|y|)}$$

Dividiendo por el término  $xy$  en numerador y denominador se tiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \beta) + \frac{o(|xy|)}{xy}}{1 + \frac{o(|y|)}{y} + \frac{o(|x|)}{x} + \frac{o(|x|) \cdot o(|y|)}{xy}} = 1 - \beta$$

Si usando infinitésimos no se pudiera simplificar por la definición de infinitésimo, se tendría que la función es discontinua y por tanto sólo queda dar un ejemplo de dos curvas a través de las cuales el límite de la función cambie.

## 1.6. Propiedades topológicas de las funciones continuas

**Definición:** Un conjunto abierto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice conexo si y solo si para todos  $\vec{x}, \vec{y} \in A$  existe un arco continuo  $\vec{\varphi} : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\vec{\varphi}(\vec{a}) = \vec{x}$ ,  $\vec{\varphi}(\vec{b}) = \vec{y}$  y además para todo  $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]$  se tiene que  $\vec{\varphi}(\vec{c}) \in A$ . Es decir, es posible trazar una curva  $\vec{\varphi}$  desde  $\vec{x}$  hasta  $\vec{y}$  sin salir del conjunto  $A$

**Teorema 1.6.1** (Valores intermedios). *Dada una función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  consideremos un conjunto abierto y conexo  $A \subset \mathcal{D}(f)$  y un par de puntos  $\vec{x}, \vec{y} \in A$  tales que:*

$$\left. \begin{array}{l} f(\vec{x}) = \alpha \\ f(\vec{y}) = \beta \end{array} \right\} \forall \alpha < \beta$$

entonces se tiene que:

$$\forall \gamma \mid \alpha \leq \gamma \leq \beta \exists \vec{z} \in A \mid f(\vec{z}) = \gamma$$

**Teorema 1.6.2.** *La imagen de un abierto conexo por una función continua es un intervalo en  $\mathbb{R}$*

**Teorema 1.6.3.** *Dada una función continua  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un conjunto compacto  $S \subset \mathcal{D}(f)$  se tiene que  $f(S) \subset \mathbb{R}^m$  es un compacto.*

**Teorema 1.6.4.** *Si  $S \subset \mathbb{R}^n$  es compacto y la función  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $S$ , entonces  $f$  está acotada en  $S$  y alcanza en puntos de  $S$  los valores  $M = \sup_{\vec{x} \in S} f(S)$  y  $m = \inf_{\vec{x} \in S} f(S)$ .*

**Teorema 1.6.5.** *Si  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua y biyectiva de  $S$  en  $f(S)$  y  $S$  es compacto, entonces  $f^{-1} : f(S) \rightarrow S$  es también continua.*

A las funciones continuas y biyectivas tales que su inversa es también continua se les llama homeomorfismos y preservan las propiedades topológicas de los conjuntos.

# Capítulo 2

## Diferenciabilidad y derivadas parciales

En este capítulo se introduce la noción de derivada para funciones de varias variables.

### 2.1. Diferencial de una función en un punto

Para estudiar la diferenciación de funciones de varias variables serán necesarios algunos conceptos de álgebra lineal sobre la teoría de aplicaciones lineales. Además es necesario definir la norma de una aplicación lineal, sabiendo que las aplicaciones lineales son continuas en todos los puntos.

**Definición** Dada la esfera  $n - 1$  dimensional:

$$S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

Se define la norma de la aplicación lineal  $A$  como:

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \in S^{n-1}} \|A(\vec{x})\| = \max_{\vec{v} \neq 0} \frac{\|A(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|}$$

de donde si la norma es el máximo de los cocientes de la norma del vector imagen de  $\vec{v}$  por  $A$  y la norma de  $\vec{v}$  inmediatamente se tiene:

$$\frac{\|A(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|} \leq \|A\| \Leftrightarrow \|A(\vec{v})\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{v}\|$$

**Definición** Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  con dominio  $\mathcal{D}(f) = U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\vec{a}$  un punto interior de  $U$ . Se dice que  $f$  es diferenciable en  $\vec{a}$  si existe una bola  $B_r(\vec{0}) \subset U$  y una aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  tales que:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + A(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|) \forall \vec{h} \in B_r(\vec{0})$$

Es decir,  $f$  es diferenciable en  $\vec{a}$  si:

$$\Delta f(\vec{a}; \vec{h}) \equiv f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - A[\vec{h}] + o(\|\vec{h}\|)$$

**Unicidad de la diferencial** La aplicación lineal  $A$ , en caso de que exista, es única y se llama diferencial de  $f$

**Definición** Una función  $f$  se dice diferenciable en un abierto  $U \subset \mathcal{D}(f)$  si lo es  $\forall \vec{a} \in U$ .

**Proposición** Si  $f$  es diferenciable en un punto  $\vec{a} \in \mathcal{D}(f)$ , entonces  $f$  es continua en ese punto.

**Demostración**

$$\begin{aligned} \Delta f(\vec{a}; \vec{h}) &\equiv f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A[\vec{h}] + o(\|\vec{h}\|) \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} [f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})] &= 0 \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{a} + \vec{h}) &= f(\vec{a}) \end{aligned}$$

Luego  $f$  es continua en  $\vec{a}$ .

**Definición: Derivadas parciales** Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $\vec{a} \in \mathcal{D}(f)$ . Se llama derivada parcial de  $f$  respecto de la variable  $x_i$  al límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

Donde  $\vec{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica, es decir, todos sus elementos son nulos excepto un 1 en la posición  $i$ . Para calcular una derivada parcial se toman como constantes el resto de variables y se deriva respecto a la variable  $x_i$ .

## 2.2. Matriz de la aplicación lineal $df$

1. Sea  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . La matriz de la aplicación lineal será una matriz  $1 \times 1$  y vendrá dada por la derivada de  $f$ .

**2.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La matriz de la aplicación lineal será un vector  $1 \times n$  y se llama gradiente de  $f$ .

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Este vector actúa sobre el vector de incrementos  $\vec{h}$ :

$$\Delta f(\vec{a}, \vec{h}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{h}$$

Otra notación para la diferencial de una función de este tipo es:

$$df(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot dx_i$$

**3.** Sea una curva paramétrica  $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta \vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0 + \Delta t) - x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_m(t_0 + \Delta t) - x_m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} \end{pmatrix} (t_0) \Delta t + o(|t|)$$

Donde el vector

$$d\vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} \end{pmatrix}$$

es un vector tangente a la trayectoria de la curva en el punto  $t_0$

**4. Matriz Jacobiana** Sea  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La matriz de la aplicación lineal diferencial de  $f$  se llama matriz Jacobiana de  $f$  en  $\vec{a}$  y viene dada por:

$$d\vec{f}(\vec{a}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Las filas de la matriz Jacobiana de  $\vec{f}$  son los gradientes de cada una de las funciones escalares que componen  $\vec{f}$

## 2.3. Propiedades de la diferenciación

### 2.3.1. Suma de funciones diferenciables

Sean  $\vec{f}_1, \vec{f}_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciables en  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Se tiene que  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$  es diferenciable y su diferencial vale:

$$d(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)(\vec{a}) = d\vec{f}_1(\vec{a}) + d\vec{f}_2(\vec{a})$$

Además  $d(\lambda\vec{f})(\vec{a}) = \lambda d\vec{f}(\vec{a}) \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , es decir, la diferenciación es lineal puesto que respeta la suma y el producto por escalares.

### 2.3.2. Regla de Leibniz

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables en  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . El producto  $(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$  es diferenciable en  $\vec{a}$  y su diferencial vale:

$$d(f \cdot g)(\vec{a}) = [df \cdot g + f \cdot dg](\vec{a})$$

Esta regla puede aplicarse a productos no conmutativos como el producto vectorial, siempre y cuando se respete el orden de factores.

### 2.3.3. Regla de la cadena

Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  tales que  $f$  es diferenciable en  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  y  $g$  es diferenciable en  $\vec{b} = f(\vec{a}) \in \mathbb{R}^m$ . Entonces la composición de ambas funciones  $h(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$  es diferenciable en  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  y su diferencial es:

$$dh(\vec{x}) = d(g \circ f)(\vec{a}) = dg(f(\vec{a})) \cdot df(\vec{a})$$

Recordando que la diferencial es una aplicación lineal y que la composición de aplicaciones lineales viene dada por la matriz producto de las matrices de cada aplicación se tiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m} \end{pmatrix} (f(\vec{a})) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{a})$$

Es decir, la matriz Jacobiana de una composición es el producto de Jacobianas de cada una de las funciones. Otra forma de expresar esto es:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

Donde las parciales de  $h_i$  se evalúan en  $f(\vec{a})$  y las de  $y_j$  se evalúan en  $\vec{a}$ .

## 2.4. Teorema de Euler

**Definición** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es una función homogénea de grado  $p$  si se cumple:

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda^p \cdot f(\vec{x})$$

A estas funciones homogéneas se las puede aplicar el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.1** (Euler). *Sea  $f(x_1, \dots, x_n)$  una función homogénea de grado  $p$ . Entonces se cumple la relación:*

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = p \cdot f(\vec{x})$$

## 2.5. Funciones de clase $C^1$

**Definición** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice de clase  $C^1$  en un abierto  $U \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$  si y sólo si para todo  $\vec{x} \in U$  existen todas las derivadas parciales de  $f$  y son funciones continuas en  $\vec{x}$ . La suma de funciones de clase  $C^1$  es una función de clase  $C^1$ . Además todas estas funciones son diferenciables.

**Teorema 2.5.1.** *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en un abierto  $U$ , entonces  $\forall \vec{x} \in U$ ,  $f$  es diferenciable.*

## 2.6. Derivadas parciales y diferenciales sucesivas

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en un abierto  $U \subset \mathcal{D}(f)$ . La aplicación diferencial ha sido definida como:

$$\begin{aligned} df : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} \in U \subset \mathbb{R}^n &\mapsto df(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Podemos ahora definir las diferenciales sucesivas de la función  $f$  como:

$$d^{(p)} f(\vec{x}) = \frac{\partial^p f_i}{\partial x_{j_p} \cdots \partial x_{j_1}}$$

**Definición** Dada una función  $f$  diremos que es de clase  $C^n$  en el abierto  $U \subset \mathcal{D}(f)$  si existen todas las derivadas parciales de orden  $n$  y son continuas en el abierto  $U$ .

**Definición** Se definen las derivadas cruzadas de una función  $f$  como:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_p \cdots \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_{p-1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Es decir, las derivadas cruzadas se calculan derivando cada vez respecto a una variable distinta. Estas son derivadas de orden  $p$ . Es posible que todas las derivadas cruzadas coincidan, esta posibilidad está dada por el lema de Schwartz.

**Lema (Schwartz)** Sea  $f(x_1, \dots, x_n)$  una función de clase  $C^n$  en un abierto  $U \subset \mathcal{D}(f)$ . Entonces se tiene que todas las derivadas cruzadas son iguales para todas las permutaciones posibles de las variables.

**Ejemplo** Sea  $f(x, y)$  una función de clase  $C^2$ . Entonces se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$$

Por ejemplo, sea  $f(x, y) = \text{sen}(xy^2)$  (de clase  $C^\infty$ ). Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 \cos(xy^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy \cos(xy^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 2y \cos(xy^2) - 2y^3 x \text{sen}(xy^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \text{sen}(xy^2) \end{aligned}$$

De donde inmediatamente se tiene que para esta función:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Corolario** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^n$ , entonces su matriz Hessiana es simétrica.

**Definición: Matriz Hessiana** Dada  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , existe una matriz  $H_{ij}$  de dimensión  $n \times n$  con las derivadas parciales segundas de la función  $\vec{f}$ .

$$\forall f(x_1, \dots, x_n) \exists H_{ij}(\vec{x}) \in \mathfrak{M}_{n \times n} \mid H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (\vec{x})$$

## 2.7. Derivadas direccionales

**Definición** Dada una función de  $n$  variables  $f(x_1, \dots, x_n)$  y dados un punto  $\vec{a}$  interior a  $\mathcal{D}(f)$  y un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  se considera la función de una variable

$$g(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$$

Y se llama derivada de  $f$  respecto de  $\vec{v}$  en el punto  $\vec{a}$  a  $D_{\vec{v}}f(\vec{a}) \equiv g'(0)$ . Si  $\|\vec{v}\| = 1$ , entonces  $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$  se llama derivada direccional de  $f$  en la dirección y sentido de  $\vec{v}$ .

1. Si  $\vec{v} = \vec{e}_i$ , entonces:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$$

2. Si  $f$  es diferenciable en  $\vec{a}$ , aplicando la regla de la cadena:

$$g = f \circ \vec{\varphi} \quad \forall \vec{\varphi} = \vec{a} + t\vec{v}$$

De donde inmediatamente:

$$dg(0) = g'(0) = df(\vec{\varphi}(0)) \cdot \vec{\varphi}'(0) = \vec{\nabla}f(\vec{\varphi}(0)) = \vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

Es decir:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot v_i$$

### 2.7.1. Interpretación geométrica del gradiente

Sea  $f$  una función diferenciable en un punto  $\vec{a}$ . Sea  $D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}f(\vec{a})$  siendo  $\|\vec{v}\| = 1$ . Entonces se tiene:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \|\vec{\nabla}f(\vec{a})\| \cdot \cos \theta \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

Y por tanto la dirección de máximo crecimiento de  $f$  será aquella en la que  $D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \|\vec{\nabla}f(\vec{a})\|$ , es decir,  $\theta = 0$ , en cuyo caso se tiene  $\vec{v} \parallel \vec{\nabla}f(\vec{a})$ .

## 2.8. Plano tangente a superficies

Se estudiará ahora el plano (o hiperplano, en caso de dimensiones mayores que 3) tangente a superficies. Es muy importante el concepto de vector normal a una superficie, que como se demostrará corresponde al gradiente.

**Teorema 2.8.1.** *Sea una superficie en  $\mathbb{R}^n$  dada por una función  $f$ . El gradiente  $\vec{\nabla}f$  es normal a la superficie en cada punto.*

**Demostración** Sea una función  $f(x_1, \dots, x_n)$  de clase  $C^1$  y sea  $L_c(f)$  el conjunto de nivel  $c$  de dicha función tal que existe un punto  $\vec{a}$  en el dominio tal que  $c = f(\vec{a})$ . Consideremos el gradiente de la función  $\vec{\nabla} f$ . Si se toma una curva  $\vec{\varphi}(t)$  contenida en la superficie en cada punto y se define una función de una variable dada por:

$$g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) \mid \vec{\varphi}(0) = \vec{a}$$

Entonces, al estar contenida  $\vec{\varphi}$  en  $L_c(f)$ , se tiene:

$$f(\vec{\varphi}(t)) = c \Leftrightarrow \frac{dg}{dt}(0) = 0$$

Y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dg}{dt}(0) = \vec{\nabla} f(\vec{\varphi}(0)) \cdot \vec{\varphi}'(0) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot \vec{\varphi}'(0)$$

De donde:

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) \perp \vec{\varphi}'(0)$$

Luego como  $\vec{\varphi}'(0)$  es el vector tangente a la curva  $\varphi$  y el gradiente es normal a este vector, se tiene que para cualquier curva  $\varphi$ , el gradiente es normal a ella y por tanto a la superficie que las contiene a todas, es decir, a  $L_c(f)$ .

### 2.8.1. Ecuación del plano tangente a $L_c(f)$

Recordando que dado el vector normal a un plano y un punto de dicho plano se tenía determinada su ecuación, se tiene que el plano tangente a una superficie de nivel  $L_c(f)$  en un punto  $\vec{a}$  es:

$$\pi \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (x_i - a_i) = 0 \equiv \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

### 2.8.2. Plano tangente a la gráfica de una función

La gráfica de una función  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  se puede considerar como superficie de nivel de una función  $F$  cuya gráfica está en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta función viene dada por

$$F(\vec{x}, z) = z - f(\vec{x})$$

Si hallamos la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel  $L_0(F)$  obtendremos el plano tangente a  $f$  en el punto pedido. Para esto también se puede utilizar la fórmula

$$z - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot (x_i - a_i)$$

## 2.9. Divergencia y rotacional

En esta sección se estudiarán los operadores divergencia, rotacional y laplaciano. Consideremos el campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz Jacobiana es:

$$d\vec{F}(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

**Definición** Dado un campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  de clase  $C^1$  en un cierto dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  se llama divergencia de  $\vec{F}$  a una función escalar dada por la traza de la matriz Jacobiana

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{tr}(d\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Si se introduce el operador nabla ( $\nabla$ ) definido por el vector de derivadas parciales

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

se tiene inmediatamente:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

**Definición** Se llama rotacional de  $\vec{F}$  al campo vectorial formado con la parte antisimétrica de la matriz Jacobiana, esto es:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Si  $\vec{F}$  es de clase  $C^1$ ,  $\operatorname{rot} \vec{F}$  es continua.

### 2.9.1. Teoremas sobre la divergencia y el rotacional

**Teorema 2.9.1.** Si  $f(x)$  es una función escalar de clase  $C^2$ , se tiene que

$$\operatorname{rot} \vec{\operatorname{grad}} f = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot f) = 0$$

**Teorema 2.9.2.** Si  $\vec{f}(\vec{r})$  es un campo vectorial de clase  $C^2$ , entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

**Definición** Dada una función escalar  $f$  de clase  $C^2$  se define su Laplaciano como:

$$\nabla^2 f = \operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

El operador de Laplace o Laplaciano es por tanto:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Una función escalar que cumpla que su Laplaciano sea nulo se llama función armónica.

# Capítulo 3

## Fórmula de Taylor y extremos

En este capítulo se estudiará el teorema de Taylor para funciones de varias variables así como los máximos y mínimos de funciones, la función inversa y las funciones implícitas. Recordaremos primero el teorema de Taylor en una variable.

**Teorema 3.0.3** (Taylor). *Dada una función  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^p$  en un intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  se cumple:*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}(b-a)^{p-1} + \frac{f^{(p)}(c)}{p!}(b-a)^p$$

El último término está evaluado en un punto  $c \in (a, b)$  no localizado. A este sumando se le llama resto de Lagrange y se denota por:

$$R(a; b-a) = \frac{f^{(p)}(c)}{p!}(b-a)^p$$

Otra forma de escribir esta fórmula es la siguiente:

$$f(x_0; h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}h^{p-1} + \frac{f^{(p)}(x_0 + \tau h)}{p!}h^p$$

De donde es fácil demostrar que el último término (resto) es un infinitésimo de la  $p$ -ésima potencia del valor absoluto del incremento  $h$ , es decir:

$$R(x_0; h) = o(|h|^p)$$

Esto es, en notación compacta:

$$f(x_0; h) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} h^r + o(|h|^p)$$

Veamos ahora una generalización de esta fórmula a funciones de varias variables.

### 3.1. Fórmula de Taylor

Antes de pasar a estudiar la fórmula de Taylor en varias variables necesitaremos algunos conceptos.

**Definición** Un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice convexo si para todos  $\vec{x}, \vec{y} \in A$ , el segmento  $L[\vec{x}, \vec{y}]$  que une  $\vec{x}$  con  $\vec{y}$  está totalmente contenido en  $A$ .

$$L[\vec{x}, \vec{y}] = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) \forall 0 \leq t \leq 1\}$$

**Lema** Sea  $f(x_1, \dots, x_n)$  de clase  $C^r$  en el abierto convexo  $U \subset \mathbb{R}^n$  y sean  $\vec{x}, \vec{x} + \vec{h} \in U$ . Consideremos la función  $g(t)$  definida como:

$$g(t) = f(\vec{x} + t\vec{h}) \Rightarrow g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Entonces se cumple:

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(\vec{x} + t\vec{h}) = (\vec{h}\vec{\nabla})^k f(\vec{x} + t\vec{h}) \forall k \in [0, 1]$$

Donde el operador  $\vec{h}\vec{\nabla}$  está definido como:

$$\vec{h}\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Veamos ahora el teorema de Taylor para funciones de varias variables.

**Teorema 3.1.1** (Taylor). Sea  $f(x_1, \dots, x_n)$  de clase  $C^p$  en un abierto convexo  $U$  y sean  $\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h} \in U$ . Entonces existe un  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) tal que:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{h}\vec{\nabla})f(\vec{x}_0) + \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^2}{2!}f(\vec{x}_0) + \dots + \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^{p-1}}{(p-1)!}f(\vec{x}_0) + \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^p}{p!}f(\vec{x}_0 + \tau\vec{h})$$

La notación compacta de la expresión anterior es la siguiente:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^r}{r!} f(\vec{x}_0) + \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^p}{p!} f(\vec{x}_0 + \tau\vec{h})$$

Donde el resto de Lagrange es un infinitésimo de la norma del vector de incrementos  $\vec{h}$  elevada a  $p-1$ , esto es:

$$R(\vec{x}_0; \vec{h}) = \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^p}{p!} f(\vec{x}_0 + \tau\vec{h}) = o(\|\vec{h}\|^{p-1})$$

luego:

$$\frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^p}{p!} f(\vec{x}_0 + \tau\vec{h}) - \frac{(\vec{h}\vec{\nabla})^p}{p!} f(\vec{x}_0) = o(\|\vec{h}\|^p)$$

## 3.2. Extremos de funciones

En esta parte se estudiarán los máximos y mínimos de funciones de varias variables. Para ello necesitaremos varias definiciones y teoremas.

**Definición [Máximo - mínimo absoluto]** Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con dominio  $\mathcal{D}(f) = A \subset \mathbb{R}^n$  decimos que  $f$  tiene un máximo (mínimo) absoluto en  $\vec{x}_0 \in A$  si y sólo si

$$\forall \vec{x} \in A \Rightarrow f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad (f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0))$$

Se dirá que el máximo o el mínimo es estricto si las desigualdades anteriores son estrictas, es decir, el  $\leq$  pasa a ser  $<$  y el  $\geq$  pasa a ser  $>$ .

**Definición [Máximo - mínimo local]** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que  $f$  tiene un máximo (mínimo) local en  $\vec{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$  si y sólo si

$$\exists r > 0 \mid \forall \vec{x} \in \mathcal{D}(f) \cap B_r(\vec{x}_0) \Rightarrow f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad (f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0))$$

**Definición [Punto crítico]** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice que  $\vec{x}_0 \in U$  es punto crítico de  $f$  si y sólo si

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

**Teorema 3.2.1.** *Sea una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un punto  $\vec{x}_0 \in U$ . Si  $\vec{x}_0$  es un extremo local de  $f$ , entonces  $\vec{x}_0$  es un punto crítico.*

**Demostración** Sea la función  $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ . Si  $\vec{x}_0$  es un extremo de  $f$ , entonces  $t = 0$  es un extremo local de  $g$ . Por tanto

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = g'(0) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Sin embargo no todos los puntos críticos son máximos o mínimos. Existen otros puntos donde el gradiente se anula y no son extremos.

**Definición [Punto de silla]** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\vec{x}_0 \in U$  un punto crítico de  $f$ . Si  $\vec{x}_0$  no es un máximo o un mínimo de  $f$ , entonces se cumple

$$\forall B_r(\vec{x}_0) \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B_r(\vec{x}_0) \mid f(\vec{x}_1) > f(\vec{x}_0); f(\vec{x}_2) < f(\vec{x}_0)$$

En tal caso diremos que  $\vec{x}_0$  es un punto de silla de  $f$ .

### 3.2.1. Clasificación de puntos críticos

Para estudiar estos puntos es necesario que  $f$  sea diferenciable y de clase  $C^2$ . Si desarrollamos  $f$  mediante la fórmula de Taylor hasta orden 2 tenemos

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + \tau \vec{h})$$

Como  $\vec{x}_0$  es un punto crítico de  $f$ , el segundo término de la expresión anterior se anula. Por otro lado, el resto es el desarrollo de una forma cuadrática  $Q$  cuya matriz es la Hessiana de  $f$

$$\Delta f(\vec{x}_0; \vec{h}) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2} h^t H(\vec{x}_0 + \tau \vec{h}) h = Q(\vec{x}_0 + \tau \vec{h})$$

Al ser  $f$  de clase  $C^2$ , por el lema de Schwartz sus derivadas cruzadas coinciden y por tanto  $H$  es simétrica.

**Definición [Punto crítico no degenerado]** Dada  $f$  de clase  $C^2$  en un abierto  $U$  y un punto crítico  $\vec{x}_0 \in U$  diremos que  $\vec{x}_0$  es no degenerado si y sólo si la forma cuadrática  $Q(\vec{x}_0)$  es no degenerada, es decir, si y sólo si

$$\det(H(\vec{x}_0)) \neq 0$$

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $f$  una función de clase  $C^2$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $\vec{x}_0$  un punto crítico no degenerado de  $f$ . Entonces se cumple*

$$\forall r > 0 \exists \vec{x} \in B_r'(\vec{x}_0) \mid \vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$$

*Esto es, los puntos críticos no degenerados son aislados como puntos críticos*

Supongamos que  $f$  es de clase  $C^2$  y que  $\vec{x}_0$  es un punto crítico no degenerado de  $f$ . Entonces la forma cuadrática

$$Q[\vec{h}] = \frac{1}{2} h^t H h$$

es no degenerada si y sólo si la matriz  $H$  es definida positiva ( $\lambda_i > 0 \forall i$ ), definida negativa ( $\lambda_i < 0 \forall i$ ) o bien indefinida ( $\lambda_i > 0; \lambda_j < 0$ ) donde  $\{\lambda_r\}$  son los autovalores de la matriz Hessiana.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\vec{x}_0$  un punto crítico no degenerado de  $f$ . Entonces:*

*i) Si  $H(\vec{x}_0)$  es definida positiva, entonces  $\vec{x}_0$  es un mínimo de  $f$ .*

ii) Si  $H(\vec{x}_0)$  es definida negativa, entonces  $\vec{x}_0$  es un máximo de  $f$ .

iii) Si  $H(\vec{x}_0)$  es indefinida, entonces  $\vec{x}_0$  es un punto de silla de  $f$ .

Existe otro modo de ver si una matriz es definida positiva o negativa sin calcular el polinomio característico y extraer sus autovalores. Este es el método de Sylvester - Jacobi. Antes de poder aplicarlo necesitamos una definición más.

**Definición [Menor principal]** Sea la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llaman menores principales de  $A$  a los determinantes

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{11} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ D_n &= \det A \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.4** (Sylvester - Jacobi). Sea  $Q[\vec{h}]$  una forma cuadrática no degenerada y sean  $\{D_r\}$  los menores principales de la matriz de  $Q$ . Entonces:

i)  $Q$  es definida positiva  $\Leftrightarrow D_r > 0 \forall 1 \leq r \leq n$

ii)  $Q$  es definida negativa  $\Leftrightarrow \text{sig}(D_r) = (-1)^r \forall 1 \leq r \leq n$

iii)  $Q$  es indefinida en los demás casos.

Por tanto podemos conocer la naturaleza de un punto crítico  $\vec{x}_0$  sólo con estudiar la matriz Hessiana de  $f$  en dicho punto mediante el criterio de Sylvester - Jacobi.

### 3.2.2. Extremos en puntos frontera

Sea una función continua  $f(x_1, \dots, x_n)$  definida en un conjunto compacto  $D$ . Por el teorema de Weierstrass sabemos que  $f$  alcanzará sus extremos en

un conjunto cerrado y acotado, por tanto sobre  $D$ . Para localizar los extremos sobre  $D$  se utiliza el siguiente procedimiento:

- i) Se localizan los extremos en el interior de  $D$  por el método antes visto.
- ii) Se hallan los extremos de  $f$  como función de  $n - 1$  variables sobre  $\partial D$ .
- iii) Se calculan los valores de  $f$  sobre los puntos críticos  $\vec{a}_i$  hallados.
- iv) Se comparan los valores de  $f(\vec{a}_i)$

### 3.3. Función inversa

Trataremos ahora la invertibilidad de las funciones de varias variables.

**Definición [Función inversa]** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un abierto  $U \subset \mathcal{D}(f)$  diremos que  $f$  es invertible globalmente en  $U$  si y sólo si:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U \Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

Es decir, la función será invertible si aplica biyectivamente  $U$  sobre  $f(U)$ .

**Definición [Restricciones]** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , llamaremos restricción de  $f$  al conjunto  $A \subset \mathcal{D}(f)$  y lo denotaremos por  $f|_A$  a la función con dominio  $\mathcal{D}(f|_A) = A$  y que coincide con  $f$  sobre  $A$ , es decir:

$$f|_A(\vec{x}) = f(\vec{x}) \forall \vec{x} \in A$$

Si  $f$  es invertible sobre  $U$  se tiene: ( $I$  es la aplicación identidad)

$$\text{i) } f^{-1}|_{f(U)} \circ f|_U = I|_U$$

$$\text{ii) } f|_U \circ f^{-1}|_{f(U)} = I|_{f(U)}$$

#### 3.3.1. Invertibilidad local

Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un punto  $\vec{x}_0$  interior al dominio, diremos que  $f$  es localmente invertible en la vecindad de  $\vec{x}_0$  si y sólo si:

$$\exists r > 0 \mid B_r(\vec{x}_0) \subset \mathcal{D}(f) \text{ y } f|_{B_r(\vec{x}_0)} : B_r(\vec{x}_0) \rightarrow f(B_r(\vec{x}_0))$$

es una biyección.

Supongamos que dada una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  se quiere estudiar si es localmente invertible en un cierto  $\vec{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$ . Sean  $\vec{y} = f(\vec{x})$ ,  $\vec{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$  e  $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$ . El desarrollo de Taylor en aproximación lineal será:

$$\vec{y} - \vec{y}_0 = df[\vec{x} - \vec{x}_0] + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix} + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Por tanto:

$$\vec{y} - \vec{y}_0 = J[f(\vec{x}_0)](\vec{x} - \vec{x}_0) \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = J[f(\vec{x}_0)]^{-1}(\vec{y} - \vec{y}_0)$$

Es necesario, por tanto, que la matriz jacobiana sea invertible para poder hallar la función inversa en aproximación lineal.

### 3.3.2. Teorema de la función inversa

Antes de ver el teorema de la función inversa propiamente, necesitaremos la definición de difeomorfismo.

**Definición [Difeomorfismo]** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  y dos abiertos  $V, W \subset \mathbb{R}^n$ , diremos que  $f$  es un difeomorfismo de clase  $C^p$  (o un  $C^p$ -difeomorfismo) de  $V$  en  $W$  si se dan las siguientes condiciones:

a)  $f(V) = W$

b)  $f|_V : V \longrightarrow W$  es biyectiva y de clase  $C^p$

c)  $f|_V^{-1} : W \longrightarrow V$  es de clase  $C^p$

**Teorema 3.3.1** (Función inversa). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^p$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\vec{x}_0 \in U$  tal que  $|J[f(\vec{x}_0)]| \neq 0$ . Entonces existen dos abiertos  $V, W \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $\vec{x}_0 \in V$ ,  $f(\vec{x}_0) \in W$ ,  $f(V) = W$  y  $f : V \longrightarrow W$  es un  $C^1$  difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$ . Además se tiene:*

$$df^{-1}(\vec{y}) = [df(f^{-1}(\vec{y}))]^{-1} \quad \forall \vec{y} \in W$$

**Corolario 1** *Una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  en el abierto  $U$  es un  $C^1$ -difeomorfismo local en la vecindad de  $\vec{x}_0 \in U$  si y sólo si  $\det(J[f(\vec{x}_0)]) \neq 0$*

**Corolario 2** Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^p$  en  $U$  ( $p \geq 1$ ) y sea  $\vec{x}_0 \in U$  tal que  $\det(J[f(\vec{x}_0)]) \neq 0$ . Entonces  $\exists B_s(\vec{x}_0)$  tal que  $f|_{B_s(\vec{x}_0)}$  es un  $C^p$ -difeomorfismo.

### 3.4. Funciones implícitas

Una función implícita es una función definida por un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \Phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Sea  $r$  tal que  $r = n - m > 0$ , y sean los vectores:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = (x_1, \dots, x_r) \\ \vdots \\ \tilde{x} = (x_{r+1}, \dots, x_n) \end{array} \right\} \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = (\hat{x}, \tilde{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Donde las  $\tilde{x}$  son funciones de las  $\hat{x}$ .

**Definición [Función implícita]** Dada una función  $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un punto  $\vec{a} \in U$  tal que  $\phi(\vec{a}) = 0$ , decimos que el sistema de ecuaciones  $\{\phi_i(\vec{x}) = 0\}_{i=1}^m$  define  $m$  funciones implícitas  $\{f_i(\hat{x})\}_{i=1}^m$  en la vecindad de  $\vec{a}$  si y sólo si existe un abierto  $n$ -dimensional  $V^{(n)}$  tal que  $\vec{a} = (\hat{a}, \tilde{a}) \in V^{(n)} \subset U$  y un abierto  $r$ -dimensional  $\hat{W}^{(r)}$  tal que  $\hat{a} \in \hat{W}^{(r)}$  y una función  $f : \hat{W}^{(r)} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  con componentes  $\{f_i(\hat{x})\}_{i=1}^m$  de manera que:

a)  $(\hat{a}, f(\hat{a})) = (\hat{a}, \tilde{a}) \in V^{(n)}$

b)  $W = \{(\hat{x}, \tilde{x}) \in V^{(n)} \mid \Phi(\hat{x}, \tilde{x}) = 0\} = \{(\hat{x}, f(\hat{x})) \mid \hat{x} \in \hat{W}^{(r)}\} = \text{graf}(f)$

#### 3.4.1. Teorema de la función implícita

Supongamos el sistema de ecuaciones  $\{\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}_{i=1}^m$  y un punto  $P$  en el que se satisface dicho sistema. Aproximando por el desarrollo de Taylor se tiene:

$$\phi_i(\vec{x}) = \phi_i(P) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (x_j - a_j) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial y_k} (y_k - b_k) + o\left(\sqrt{(\hat{x} - \hat{a})^2 + (\hat{y} - \hat{b})^2}\right)$$

Donde  $P \equiv (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_m)$ . Como  $\phi_i(P) = 0$ , se obtiene un sistema lineal que permite despejar  $\tilde{y}$  en función de  $\hat{x}$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ \vdots \\ y_m - b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_r - a_r \end{pmatrix} = 0$$

De donde inmediatamente se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ \vdots \\ y_m - b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_r - a_r \end{pmatrix}$$

Si y sólo si

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

De aquí se sigue lo siguiente:

**Teorema 3.4.1** (Función implícita). *Sea  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^p \forall p \geq 1$  en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $m < n$ . Sea  $\vec{a} \in U$  tal que*

$$\Phi(\vec{a}) = 0 \text{ y } \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(\vec{a}) \neq 0$$

*Entonces es posible despejar  $\tilde{x}$  en función de  $\hat{x}$  en el punto  $\vec{a}$ .*

Este teorema es condición suficiente, pero no necesaria para la existencia de funciones implícitas en  $\vec{a}$ . Además, por derivación implícita es posible calcular las derivadas de la función implícita en  $\vec{a}$  mediante la resolución de un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es el Jacobiano, que es, por hipótesis, distinto de 0, por tanto es posible despejar las derivadas de  $f_i$ .

### 3.5. Subvariedades diferenciables

Sea  $1 \leq r \leq n$  y sea  $p \geq 1$ . Un subconjunto no vacío  $M \subset \mathbb{R}^n$  es una subvariedad diferenciable de dimensión  $r$  y de clase  $C^p$  si y sólo si para todo  $\vec{a} \in M$  existe un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un conjunto  $\{\Phi_\alpha(\vec{x})\}_{\alpha=1}^m$  de  $m = n - r$  funciones de clase  $C^p$  tales que:

a)  $\vec{a} \in U$

b)  $r \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} \right) (\vec{x}) = m \quad \forall \vec{x} \in U \cap M$

c)  $M \cap U = \{ \vec{x} \in U \mid \Phi_\alpha(\vec{x}) = 0 \} \quad \forall \alpha = 1, \dots, m; \beta = 1, \dots, n \quad (m < n).$

**Ejemplo** Sea  $M \subset \mathbb{R}^2 \mid M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = a^2\}$ .  $M$  es el conjunto de hipérbolas que intersecan con el eje  $OY$  en los puntos  $(0, \pm a)$ . Sea la función  $\phi(x, y) = y^2 - x^2 - a^2$ . Entonces se tiene:

$$\phi(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in M \Leftrightarrow M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = 0\}$$

Si estudiamos el rango de su Jacobiano (en este caso su gradiente) tenemos:

$$r \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = r \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = r(-2x, 2y) = 1 \quad \forall (x, y) \in M$$

Por tanto  $M$  es una subvariedad diferenciable.

### 3.5.1. Vectores tangentes y normales a subvariedades

Sea el sistema de ecuaciones

$$M \equiv \begin{cases} \phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Y sea  $P \in \mathbb{R}^n$  un punto que satisface dicho sistema. Entonces  $\mathbb{R}^n$  se puede descomponer en suma directa de dos subespacios vectoriales ortogonales, esto es:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{T}_p(M) \oplus \mathcal{N}_p(M) \quad \text{con} \quad \dim(\mathcal{T}_p(M)) = r = n - m; \quad \dim(\mathcal{N}_p(M)) = m$$

Estos subespacios son el de vectores tangentes a la subvariedad  $M$  en el punto  $P$  y el de vectores normales a  $M$  en  $P$ .

Sea un vector  $\vec{h} \in \mathcal{T}_p(M)$  y sea la curva paramétrica  $\varphi(t) \subset M$  tal que  $\varphi(0) = P$ . Entonces es obvio que  $\vec{h}$  es tangente a  $\varphi$  por estar contenida la curva sobre la subvariedad  $M$ . Sean ahora las funciones  $\{g_i(t)\}_{i=1}^m$  definidas

como:

$$\begin{aligned} g_1(t) = \phi_1(\varphi(t)) = 0 &\Rightarrow g'_1(0) = \vec{\nabla}\phi_1(P) \cdot \vec{h} = 0 \\ &\vdots \\ g_m(t) = \phi_m(\varphi(t)) = 0 &\Rightarrow g'_m(0) = \vec{\nabla}\phi_m(P) \cdot \vec{h} = 0 \end{aligned}$$

Entonces los vectores tangentes son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (P) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \dim(T_p(M)) = n - m = r$$

Por tanto, el subespacio de vectores tangentes es el nucleo de la aplicación lineal diferencial, es decir:

$$\mathcal{T}_p(M) = \ker(d\Phi(P))$$

Como el rango de esta aplicación es  $m$ , se tiene que  $\vec{\nabla}\phi_1, \dots, \vec{\nabla}\phi_m$  son linealmente independientes y todos pertenecen al subespacio de vectores normales por ser ortogonales a la superficie de la subvariedad, por tanto constituyen una base.

$$\mathcal{N}_p(M) = \text{lin}\{\vec{\nabla}\phi_i(P)\}_{i=1}^m$$

## 3.6. Extremos condicionados

Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que  $f$  tiene un máximo (mínimo) local condicionado al subconjunto  $M$  en el punto  $\vec{a}$  si y sólo si la función  $f|_M$  tiene un máximo (mínimo) local en  $\vec{a}$ .

### 3.6.1. Multiplicadores de Lagrange

El siguiente teorema proporciona un método (llamado de los multiplicadores de Lagrange) para calcular los extremos de una función condicionada a una subvariedad diferenciable.

**Teorema 3.6.1** (Lagrange). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $U$  y sea  $M$  una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $r > n$  contenida en  $U$ . Entonces si  $\vec{a} \in M$  es un extremo local condicionado a  $M$ , existen  $m$  números reales  $\lambda_i$  tales que la función*

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_m\phi_m$$

*tiene un punto crítico en  $\vec{a}$*

**Demostración** Supongamos que  $f$  tiene un extremo condicionado a  $M$  en un punto  $P \in M$ . Sean  $\vec{h} \in \mathcal{T}_p(M)$  y  $\varphi(t) \in M$  tal que  $\varphi(0) = P$  y  $\varphi'(0) = \vec{h}$ . Sea la función

$$g(t) = f(\varphi(t))$$

Entonces  $g(t)$  tiene un extremo en  $t = 0$ , luego  $g'(0) = 0$ .

$$g'(0) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{h} = 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathcal{T}_p(M)$$

Luego  $\vec{\nabla} f(P) \perp \vec{h}$ , por lo que  $\vec{\nabla} f(P) \in \mathcal{N}_p(M)$ , de donde

$$\vec{\nabla} f(P) = -\lambda_1 \vec{\nabla} \phi_1(P) - \dots - \lambda_m \vec{\nabla} \phi_m(P)$$

Por ser  $\{\vec{\nabla} \phi_i\}$  una base de  $\mathcal{N}_p(M)$ , de donde inmediatamente

$$\vec{\nabla}(f + \lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_m \phi_m) = \vec{0}$$

La mayor complejidad de este método está en la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales que aparecen al igualar a 0 todas las derivadas parciales. Si después de esto falta alguna ecuación, se usarán las proporcionadas por las restricciones  $\phi_i$ .

# Capítulo 4

## Integrales múltiples

En este capítulo estudiaremos la integración sobre conjuntos  $n$ -dimensionales a partir de integrales unidimensionales. Es importante dominar las técnicas del cambio de variable, integración por partes, etc. en una dimensión para generalizarlo ahora a  $n$  dimensiones.

### 4.1. Integral doble sobre un rectángulo

Sea la función  $z = f(x, y)$  definida sobre el rectángulo  $R \equiv [a, b] \times [c, d]$ , producto cartesiano de dos intervalos reales. Se llama integral doble de  $f$  sobre  $R$  al volumen del cuerpo limitado por el rectángulo y la función.

$$V(\Omega) = \int_R f(x, y) dx dy$$

Sea el rectángulo  $R \equiv [a, b] \times [c, d]$ . Tomemos una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$  y otra  $P'$  de  $[c, d]$  definidas por:

$$P \equiv a = x_0 < x_1 < \dots < b = x_m; \quad P' \equiv c = y_0 < y_1 < \dots < d = y_n$$

Bajo estas particiones,  $R$  se divide en  $m \cdot n$  subrectángulos no solapantes definidos por:

$$R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$$

En estas condiciones se definen las sumas superior e inferior de Riemann asociadas a las particiones.

**Definición [Sumas de Riemann]** Dada  $z = f(x, y)$  acotada y definida sobre el rectángulo  $R$  y dadas las particiones  $P$  y  $P'$ , para cada rectángulo

$R_{jk}$  se definen:

$$M_{jk} = \sup_{(x,y) \in R_{jk}} \{f(x,y)\}; \quad m_{jk} = \inf_{(x,y) \in R_{jk}} \{f(x,y)\}$$

Y a partir de aquí se definen las sumas superior e inferior de Riemann como:

a) Suma superior de Riemann:

$$U = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{jk} \cdot \Delta x_j \Delta y_k$$

b) Suma inferior de Riemann:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m m_{jk} \cdot \Delta x_j \Delta y_k$$

Donde el área de  $R_{jk}$  es  $A = (x_j - x_{j-1}) \cdot (y_k - y_{k-1}) = \Delta x_j \Delta y_k$

**Definición [Integral de Riemann]** Dada  $z = f(x,y)$  definida y acotada sobre el rectángulo  $[a,b] \times [c,d]$

i) Llamaremos integral superior de Riemann de  $f$  en  $R$  al número real

$$\overline{U}_R(f) = \inf\{U(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ es partición de } R\}$$

e integral inferior de Riemann en  $R$  a:

$$\underline{L}_R(f) = \sup\{L(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ es una partición de } R\}$$

ii) Decimos que  $f$  es integrable Riemann en  $R$  si y sólo si:

$$\overline{U}_R(f) = \underline{L}_R(f) = \int_R f(x,y) dx dy$$

**Teorema 4.1.1.** *Cualquier función  $f$  continua en un rectángulo  $R$  es integrable Riemann*

#### 4.1.1. Teorema de Lebesgue para integrales de Riemann

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $f$  definida y acotada en el rectángulo  $R$ . Consideremos el conjunto*

$$D = \{(x,y) \in R \mid f \text{ es discontinua en } (x,y)\}$$

*Entonces  $f$  es integrable Riemann en  $R$  si y sólo si  $D$  tiene medida nula.*

Pasaremos ahora a explicar este teorema con ciertas definiciones.

**Definición** Dados dos puntos  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  de componentes  $a_i$  y  $b_i$  tales que  $b_i > a_i \forall i$ , se llama politopo determinado por los puntos  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  al conjunto:

$$I_{[\vec{a}, \vec{b}]} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

y se define la medida o volumen del politopo como:

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

**Definición [Recubrimiento de Lebesgue]** Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$  se llama recubrimiento de Lebesgue de  $S$  a un conjunto finito o infinito numerable de intervalos abiertos  $n$ -dimensionales (politopos) tales que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$$

**Definición [Medida exterior de Lebesgue de S]** Se define la medida exterior de Lebesgue de un conjunto  $S$  como:

$$\bar{\mu}(S) = \inf \left\{ \sum_n \mu(I_n) \mid \{I_1, I_2, \dots\} \text{ es un recubrimiento de } S \right\}$$

Un conjunto  $S$  se dice de medida nula si  $\bar{\mu}(S) = 0$ , es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \{I_1, I_2, \dots\} \mid \sum_n \mu(I_n) < \epsilon$$

**Teorema 4.1.3.** Dada  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ , entonces la gráfica de  $f$  tiene medida nula.

**Teorema 4.1.4.** Si  $f(x, y)$  es una función acotada en un rectángulo  $R$  tal que el conjunto de puntos donde  $f$  es discontinua está formado por una unión finita o infinita numerable de gráficas de funciones de una variable, entonces  $f$  es integrable Riemann.

## 4.2. Propiedades de la integral

i) Linealidad:

$$\int_R (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \int_R f(x, y) dx dy + \mu \int_R g(x, y) dx dy$$

Donde  $f, g$  son integrables Riemann y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ii) Monotonía: Sean  $f, g$  integrables Riemann tales que  $f(x, y) \leq g(x, y)$ . Entonces

$$\int_R f(x, y) dx dy \leq \int_R g(x, y) dx dy \quad \forall (x, y) \in R$$

iii) Aditividad: Si  $\{R_1, \dots, R_n\}$  es una partición de  $R$  en subrectángulos no solapantes, entonces

$$\int_R f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \int_{R_i} f(x, y) dx dy$$

iv) Sea  $f$  integrable Riemann. Como  $-|f| \leq f \leq |f|$ , entonces

$$-\int_R |f(x, y)| dx dy \leq \int_R f(x, y) dx dy \leq \int_R |f(x, y)| dx dy$$

Por tanto:

$$\left| \int_R f(x, y) dx dy \right| \leq \int_R |f(x, y)| dx dy$$

### 4.3. Teorema de Fubini

**Teorema 4.3.1** (Fubini). *Sea  $f$  una función acotada e integrable Riemann en el rectángulo  $R \equiv [a, b] \times [c, d]$ . Entonces se tiene:*

$$\text{Si } \exists \int_c^d f(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\text{Si } \exists \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in [c, d] \Rightarrow \exists \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Por tanto, si existen las integrales en  $x$  y en  $y$  de  $f(x, y)$ , entonces:

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

**Corolario** *Si  $f(x, y)$  es continua en  $[a, b] \times [c, d]$ , entonces:*

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

### 4.3.1. Interpretación geométrica

Al integrar unidimensionalmente sobre la variable  $x$  se obtiene el área de un plano de la forma  $y = cte$ . Si integramos este área sobre la variable  $y$  tenemos por el principio de Cavalieri el volumen del sólido limitado por la función  $f$  y el plano del rectángulo  $R$ . Si hiciéramos lo mismo integrando primero sobre la variable  $y$ , obtendríamos el área de un plano  $x = cte$ , y si integramos sobre  $x$  volvemos a obtener el volumen de la región. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo** Calcular

$$I = \int_R (x \operatorname{sen} y - ye^x) dx dy, \text{ donde } R \equiv [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-1}^1 (x \operatorname{sen} y - ye^x) dx$$

Resolviendo la primera integral:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{sen} y \frac{x^2}{2} - ye^x \right) dy \Big|_{x=-1}^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{e} - e \right) \cdot y dy = \left( \frac{1}{e} - e \right) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

De donde se obtiene el resultado:

$$I = \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{1}{e} - e \right)$$

## 4.4. Integración sobre conjuntos generales

Supongamos que queremos integrar la función sobre un conjunto  $D$  no rectangular. Entonces podemos definir un rectángulo  $R$  tal que contenga a  $D$ . Si definimos la función  $\tilde{f}(x, y)$  como

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \forall (x, y) \in D \\ 0 & \forall (x, y) \notin D \end{cases}$$

Y de aquí, como la integral de la función 0 es 0, se tiene:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_R \tilde{f}(x, y) dx dy$$

### 4.4.1. Regiones de tipo I

Las regiones de tipo I son aquellas cuya abscisa se encuentra entre dos valores constantes, pero su ordenada está entre dos funciones  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$ , es decir, son regiones de la forma

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ y } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

La integral de cualquier función sobre regiones de este tipo viene dada por

$$\int_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dx dy$$

### 4.4.2. Regiones de tipo II

Son regiones cuya ordenada se encuentra ahora entre dos valores constantes y la abscisa se encuentra limitada por dos funciones  $\psi_1(y)$  y  $\psi_2(y)$ , es decir, son conjuntos de la forma

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \text{ y } c \leq y \leq d\}$$

La integral de una función cualquiera  $f$  sobre estas regiones viene dada por

$$\int_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

### 4.4.3. Regiones de tipo III

Las regiones de tipo III son aquellas que pueden ser consideradas tanto de tipo I como de tipo II, y su integral viene dada por la expresión

$$\int_{D_3} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

En algunas ocasiones puede ser muy complicado integrar una función en un orden dado y sin embargo, la integral en el orden opuesto es trivial, veamos un ejemplo.

**Ejemplo** Calcular

$$\int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\operatorname{sen} y}{\pi - y} dy$$

Como vemos, la solución de esta integral no es una función elemental. Si cambiamos el orden de integración tenemos

$$\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{\pi - y} dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{\pi - y} (\pi - y) dy$$

Simplificando queda

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} y dy = -\cos y \Big|_{y=0}^\pi = 2$$

## 4.5. Integrales múltiples

Sea un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$ . Si un politopo  $I_{[\vec{a}, \vec{b}]}$  definido por dos vectores  $\vec{a}, \vec{b}$  con  $a_i < b_i$  tiene medida  $\mu$  y sobre él se define una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dividiendo el politopo en particiones  $P_i$ , se define la suma superior de Riemann como:

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \mu(I_i) \Rightarrow \overline{U}_R(f, \mathcal{P}) = \inf\{U(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ es partición de } I\}$$

Y la suma inferior de Riemann como:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mu(I_i) \Rightarrow \underline{L}_R(f, \mathcal{P}) = \sup\{L(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ es partición de } I\}$$

La función  $f$  será integrable en sentido Riemann si y sólo si

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d^n \vec{x} = \overline{U}_R(f, \mathcal{P}) = \underline{L}_R(f, \mathcal{P})$$

### 4.5.1. Teorema general de Fubini

**Teorema 4.5.1** (Fubini). *Sea  $f$  una función definida y acotada en un politopo  $n$ -dimensional  $I_n$ . Pongamos  $I_n$  en la forma  $I_n = I_r \times I_{n-r}$ , donde  $I_k$  es  $k$ -dimensional. Sean los vectores  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_r)$  y  $\tilde{x} = (x_{r+1}, \dots, x_n)$ . Entonces si  $f$  es integrable en  $I$  y existen las integrales*

$$\int_{I_{n-r}} f(\hat{x}, \tilde{x}) dx_{r+1} \cdots dx_n \text{ y } \int_{I_{n-r}} f(\hat{x}, \tilde{x}) dx_1 \cdots dx_r$$

Se tiene

$$\int_I f(\hat{x}, \tilde{x}) d^n \vec{x} = \int_{I_r} d^r \hat{x} \int_{I_{n-r}} f(\hat{x}, \tilde{x}) d^{n-r} \tilde{x} = \int_{I_{n-r}} d^{n-r} \tilde{x} \int_{I_r} f(\hat{x}, \tilde{x}) d^r \hat{x}$$

Estas integrales pueden seguir descomponiéndose hasta expresar la integral total como composición de integrales iteradas.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $S$  no es un politopo. Podemos definir la integral de una función  $f$  sobre el conjunto  $S$  definiendo la función  $\tilde{f}$  sobre un politopo que contenga a  $S$  dada por:

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in S \\ 0 & \forall \vec{x} \notin S \end{cases}$$

Y por tanto

$$\int_S f(\vec{x}) d^n \vec{x} = \int_I \tilde{f}(\vec{x}) d^n \vec{x}$$

## 4.6. Integrales triples

En esta sección se estudiará un caso particular de las integrales múltiples para conjuntos tridimensionales en  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.6.1. Tipos de regiones en $\mathbb{R}^3$

Hay varios tipos de regiones en  $\mathbb{R}^3$  según la variable que se delimite por constantes o por funciones de las otras dos variables. Como ejemplo veremos las secciones de tipo I. Para el resto es fácil generalizar una fórmula para hallar la integral de una función sobre la región.

Las regiones de tipo I son de la forma

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \text{ y } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \text{ y } \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

La integral sobre una región de este tipo se define como:

$$\int_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

El volumen de una región cualquiera  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^3$  es la integral

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy dz$$

Que se reduce a la forma ya vista usando integrales dobles

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} (\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y)) dy$$

Estas integrales pueden calcularse de forma iterada utilizando el teorema de Fubini.

## 4.7. Cambio de variables

Supongamos un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  y una función  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Es posible que existan variables  $\{u_i\}_{i=1}^n$  tales que  $x_i = x_i(u_1, \dots, u_n)$  y que la integral sobre las variables  $u_i$  sea mucho más sencilla que sobre las  $x_i$ . Es necesario tener en cuenta que al cambiar las variables también cambia el recinto de integración.

Sea un conjunto  $S^*$  cuya imagen por un cambio de variables  $\vec{x}(\vec{u})$  es un conjunto  $S$ . Si dividimos  $S^*$  en politopos, existirá una correspondencia entre la red de politopos de  $S^*$  y otra red distinta en  $S$ , donde para cada politopo en  $S^*$  existe uno en  $S$ . Entonces

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) d^n \vec{x} \simeq \sum_{\alpha=1}^n f(\vec{x}_\alpha) \cdot \mu(I_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^n f(\vec{x}) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| \mu(I_\alpha^*)$$

Donde

$$|J(\vec{x})| = \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right|$$

es el valor absoluto del determinante Jacobiano del cambio de coordenadas. Veamos un teorema que explica el cambio de variables.

**Teorema 4.7.1** (Cambio de variable). *Sean  $U$  y  $U^*$  dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $T : U^* \rightarrow U$  una función de clase  $C^1$  tal que su Jacobiano es no nulo, salvo quizá en un conjunto de medida nula. Sean  $S \subset U$  y  $S^* \subset U^*$  suficientemente regulares para poder definir sobre ellos integrales de Riemann y tales que  $T : S^* \rightarrow S$  es biunívoca salvo quizá en un conjunto de medida nula. Entonces para toda función  $f$  integrable en sentido Riemann se tiene:*

$$\int_S f(\vec{x}) d^n \vec{x} = \int_{S^*} f(T(\vec{u})) |J_T(\vec{u})| d^n \vec{u}$$

### 4.7.1. Coordenadas polares

El cambio de variable a coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$  viene dado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \end{array} \right\} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

Por tanto, del plano  $XY$  pasamos al plano  $R\Theta$ . Por ejemplo, sea la circunferencia dada por

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Si pasamos a coordenadas polares, tenemos

$$r^2 = a^2 \Leftrightarrow r = \pm a; \theta \in [0, 2\pi]$$

Observemos que el cambio de variables ha cambiado la geometría del dominio. En el plano  $R\Theta$ , la circunferencia pasa a ser el rectángulo  $R_{r\theta} \equiv [0, a] \times [0, 2\pi]$

### 4.7.2. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas en  $\mathbb{R}^3$  son las equivalentes a las coordenadas polares añadiendo la coordenada  $z$  que señala la altura sobre el plano. Las ecuaciones del cambio de variable son:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

### 4.7.3. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son importantes en problemas con simetría esférica, puesto que los simplifican mucho. Las ecuaciones son, en este caso:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{array} \right\} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \rho^2 \sin \theta$$

## 4.8. Aplicaciones de la integral

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la integral a la física y la mecánica, como el cálculo de centros de masa y de momentos de inercia

### 4.8.1. Centro de masa

Sea un cuerpo de densidad variable dada por  $\rho(x, y, z)$ . Entonces, su centro de masa es el punto  $C = (x_0, y_0, z_0)$  cuyas coordenadas son:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_S x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_0 &= \frac{1}{M} \int_S y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_0 &= \frac{1}{M} \int_S z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

Donde  $M$  es la masa del cuerpo, dada por:

$$M = \int_S \rho(x, y, z) dx dy dz$$

### 4.8.2. Momento de inercia

El momento de inercia de un cuerpo es una magnitud análoga a la masa, utilizada en dinámica de rotación y que varía respecto a cada eje. El momento de inercia respecto de el eje  $X$  se denotará  $I_x$ . Los momentos de inercia respecto a cada eje vienen dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_y &= \int_S (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_z &= \int_S (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

### 4.8.3. Promedio integral

El promedio integral de una función en un cierto politopo  $I$  es el valor medio que toma la función en dicho politopo, y se calcula mediante la fórmula

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(x_1, \dots, x_n) d^n \vec{x}$$

Esta fórmula es bastante lógica, puesto que es una generalización del promedio discreto  $1/n \sum_{i=1}^n x_i$  para una variable continua.



# Capítulo 5

## Integrales de línea y superficie

En este capítulo se estudiarán las integrales sobre curvas y sobre superficies generales que no tienen por que estar definidas por una función de la forma  $z = f(x, y)$ . Empezaremos con las integrales sobre curvas.

### 5.1. Longitud de una curva paramétrica

**Definición** Llamaremos curva o trayectoria regular a trozos a la imagen de una función  $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es continua en el intervalo real  $[a, b]$  y de clase  $C^1$  salvo en un número finito de puntos y tal que

$$\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| \neq 0$$

Salvo quizá en un número finito de puntos. Se observa que la gráfica de cualquier función real de variable real se puede considerar una curva paramétrica en la forma  $\vec{\sigma}(t) = (t, f(t))$

Para una curva así definida, se define el elemento de longitud como  $\|d\vec{\sigma}\|$ , y por tanto, la longitud de una curva paramétrica vendrá dada por

$$L(\vec{\sigma}) = \int_{\vec{\sigma}} \|d\vec{\sigma}\| = \int_a^b \|d\vec{\sigma}\| = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt$$

**Ejemplo** Probaremos que la longitud de la circunferencia unidad es  $2\pi$ . Sea la circunferencia de radio 1. Esta curva se puede parametrizar usando coordenadas polares en  $x = \cos \theta$ ;  $y = \sin \theta$ , de donde  $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$  para  $t$  variando entre 0 y  $2\pi$ , por tanto:

$$L(\vec{\sigma}) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

### 5.1.1. Reparametrización de curvas

Una misma curva puede ser parametrizada de infinitas maneras. Estas parametrizaciones se dividen en dos grupos según la orientación de la curva.

**Definición [Reparametrización]** Sea  $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regular a tozos y sea  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  un difeomorfismo. Entonces a la curva paramétrica  $\vec{\varphi} = \vec{\sigma}(h(u))$  se le llama reparametrización de  $\vec{\sigma}$ . Si el difeomorfismo  $h$  es monótono creciente, entonces la reparametrización no induce un cambio de orientación, sin embargo, si  $h$  es monótona decreciente, hay un cambio de orientación.

**Teorema 5.1.1.** *La longitud de una curva paramétrica es invariante bajo reparametrizaciones*

**Demostración** Sea  $\sigma = \sigma(t)$  tal que  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y una reparametrización  $\rho = \rho(u)$  tal que  $\rho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$L(\rho) = \int_{\rho} \|d\rho\| = \int_c^d \left\| \frac{d\rho}{du} \right\| du = \int_a^b \left\| \frac{dt}{du} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \right\| du = \int_c^d \left| \frac{dt}{du} \right| \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| du$$

Si cambia la orientación, se tiene

$$\int_c^d \left| \frac{dt}{du} \right| \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| du = - \int_b^a \frac{dt}{du} \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| du = L(\sigma)$$

Si por el contrario,  $\rho$  mantiene la orientación, se tiene

$$\int_c^d \left| \frac{dt}{du} \right| \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| du = \int_a^b \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| dt = L(\sigma)$$

## 5.2. Integrales sobre curvas paramétricas

En esta parte se estudiará la integración de funciones sobre curvas paramétricas y se distinguirán dos casos, uno para campos escalares y otro para campos vectoriales.

### 5.2.1. Integral de trayectoria para campos escalares

**Definición** Dada  $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un campo escalar  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  se define la integral de trayectoria de  $\phi(\vec{x})$  sobre la curva  $\sigma(t)$  como:

$$\int_{\sigma} \phi dS = \int_a^b \phi(\sigma(t)) \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| dt, \text{ donde } dS = \|d\sigma\|$$

**Ejemplo** Sea  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sobre la hélice  $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\sigma} \phi dS = \int_0^{2\pi} \phi(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| dt$$

Donde

$$\frac{d\sigma}{dt} = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| = \sqrt{2}$$

luego

$$\int_{\sigma} \phi dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right)$$

**Interpretación geométrica de la integral de trayectoria** Si sobre cada punto  $(x, y, z)$  de la curva  $\sigma$  se levantara una altura  $\phi(x, y, z)$ , la integral de trayectoria sobre  $\sigma$  de  $\phi$  sería el área de la "valla" formada por la curva y su imagen  $\phi(\sigma)$ .

### 5.2.2. Integral de línea

**Definición** Dada  $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo sobre la curva  $\sigma$ , se define la integral de línea de  $\vec{F}$  sobre  $\sigma$  como:

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt} dt$$

Como el vector unitario tangente a  $\sigma$  es

$$\vec{T} = \frac{1}{\left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\|} \frac{d\sigma}{dt}$$

Entonces se tiene

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{T}(\sigma(t)) \cdot \vec{F}(\sigma(t)) \left\| \frac{d\sigma}{dt} \right\| dt$$

Es decir, la integral de línea es la integral de trayectoria de la componente tangencial de  $\vec{F}$  sobre  $\sigma$ . Las integrales de línea varían su signo bajo reparametrizaciones con cambio de orientación.

**Ejemplo** Sea  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  sobre 2 vueltas de la hélice  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Su integral de línea será

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{4\pi} \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt} dt$$

Es decir

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} dt$$

Integrando este producto escalar tenemos

$$\int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2$$

### 5.3. Campos conservativos

**Definición** Dado un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un campo vectorial sobre él  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , decimos que  $\vec{F}$  es conservativo en  $U$  si y sólo si existe una función escalar  $\phi(\vec{x})$  tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in U$$

**Teorema 5.3.1.** *La función potencial  $\phi$  es única salvo constante aditiva*

**Demostración** Dados  $\vec{x}, \vec{y} \in U$ , existirá una trayectoria  $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow U$  continua y de clase  $C^1$  tal que  $\vec{\sigma}(0) = \vec{x}$  y  $\vec{\sigma}(1) = \vec{y}$  por ser  $U$  conexo. Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  campos escalares tales que  $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi_1 = \vec{\nabla} \phi_2$  y sea la función  $\psi$  tal que

$$\psi(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) \mid g(t) = \psi(\sigma(t))$$

Entonces

$$\psi(\vec{y}) - \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{\sigma}(1)) - \psi(\vec{\sigma}(0)) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$$

Por tanto

$$g'(t) = \vec{\nabla} \psi(\sigma(t)) \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = 0$$

Y además

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} \phi_1 - \vec{\nabla} \phi_2 = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

Por tanto

$$\psi(\vec{y}) - \psi(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \psi(\vec{y}) = \psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{y}) - \phi_2(\vec{y})$$

Luego

$$\phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + K$$

**Teorema 5.3.2.** Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial conservativo en el abierto conexo  $U$  y  $\vec{\sigma}$  es una curva de clase  $C^1$  a trozos, entonces

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \phi(\sigma(b)) - \phi(\sigma(a)) = \phi(Q) - \phi(P)$$

Donde  $P$  y  $Q$  son los valores de  $\vec{\sigma}$  en los puntos  $a$  y  $b$

**Demostración** Como  $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ , se tiene

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\sigma} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{\nabla}\phi \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \cdot dt = \int_a^b \vec{\nabla}\phi(\vec{\sigma}(t)) \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \cdot dt$$

Sea la función  $g(t) = \phi(\sigma(t))$ . Su derivada, aplicando la regla de la cadena, será  $g'(t) = \vec{\nabla}\phi(\sigma) \cdot \frac{d\sigma}{dt}$ , por tanto

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = \phi(\sigma(b)) - \phi(\sigma(a)) = \phi(Q) - \phi(P)$$

**Teorema 5.3.3.** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial en el abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$  es independiente de  $\sigma$ . Entonces  $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$  y la función potencial  $\phi$  puede expresarse como

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\vec{a}$  es el origen de potenciales

**Demostración**

$$\phi(\vec{x} + \vec{h}) - \phi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x} + \vec{h}} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\vec{x}}^{\vec{x} + \vec{h}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Sea  $\vec{\sigma}(t) = \vec{x} + t\vec{h}$  con  $t \in [0, 1]$ . Entonces

$$\int_{\vec{x}}^{\vec{x} + \vec{h}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \vec{F}(\sigma(t)) \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \cdot dt = \int_0^1 \vec{h} \cdot \vec{F}(\sigma(t)) dt$$

Supongamos que los incrementos apuntan en las direcciones de los vectores de la base canónica, es decir,  $\vec{h} = h\vec{e}_i$ . Entonces

$$\phi(\vec{x} + h\vec{e}_i) - \phi(\vec{x}) = h \int_0^1 F_i(\vec{x} + t \cdot h\vec{e}_i) dt$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{x} + h\vec{e}_i) - \phi(\vec{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(\vec{x} + t \cdot h\vec{e}_i) dt = F_i(\vec{x})$$

Luego  $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$

**Teorema 5.3.4** (Campos conservativos). *Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial conservativo en  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) *La integral de línea de  $\vec{F}$  entre dos puntos cualesquiera  $P, Q \in U$  es independiente del camino en  $U$*

b)  *$\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$  para una cierta función potencial  $\phi$*

c) *La integral de línea de  $\vec{F}$  sobre cualquier curva regular cerrada en  $U$  es nula, es decir*

$$\oint_{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall \gamma$$

La demostración puede consultarse en cualquier libro de cálculo vectorial.

**Teorema 5.3.5.** *Dado  $\vec{F}$  de clase  $C^1$  en un abierto conexo  $U$ , si  $\vec{F}$  es conservativo, se cumple*

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \right)_{i,j=1}^n \quad \forall \vec{x} \in U \Rightarrow \text{rot} \vec{F} = 0$$

**Demostración** Si  $\vec{F}$  es conservativo, se tiene  $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$ , por lo tanto

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

Si  $\vec{F}$  es de clase  $C^1$  (por hipótesis),  $\phi$  será de clase  $C^2$  y por tanto, por el lema de Schwartz, las derivadas cruzadas coinciden, luego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Este teorema da una condición necesaria, pero no suficiente para que el campo vectorial sea conservativo. Para comprobar si un campo lo es, se calculará su rotacional, y si este es igual a 0 se calculará la función potencial  $\phi$ . En caso de existir  $\phi$ , el campo es conservativo.

## 5.4. Teorema de Green en el plano

**Teorema 5.4.1** (Green). *Sea  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $C$  una curva de Jordan continua y regular a trozos y llamemos  $R$  al conjunto delimitado por  $C$ . Supongamos que  $R \subset S$ . Entonces*

$$\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Una curva de Jordan es una curva cerrada sin autointersección, es decir, que no se corta a sí misma.

Aplicando el teorema de Green podemos expresar el área de una región  $D$  como una integral de línea sobre su frontera en la forma

$$A(D) = \int_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y, x) d\vec{r}$$

La demostración es evidente

**Definición** Un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice simplemente conexo si cualquier curva cerrada contenida en  $U$  se puede deformar continuamente a un punto sin salir del conjunto

**Teorema 5.4.2.** *Si  $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  es de clase  $C^1$  en  $S \subset \mathbb{R}^2$  y  $S$  es simplemente conexo, entonces*

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Es decir, si  $U$  es un abierto simplemente conexo, es condición suficiente para que un campo vectorial sea conservativo que su rotacional sea nulo. Intuitivamente, un abierto simplemente conexo es aquél en el que no hay "agujeros".

**Demostración**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Como por hipótesis las derivadas cruzadas coinciden, se tiene que la integral de línea sobre cualquier curva de Jordan  $C$  es nula y por tanto  $\vec{F}$  es conservativo.

**5.4.1. Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas**

**Teorema 5.4.3.** Sean  $\{C_i\}_{i=1}^n$  curvas de Jordan continuas y regulares a trozos orientadas en sentido positivo tales que  $C_i \cap C_j = \emptyset \forall i, j$ , todas las curvas  $\{C_i\}_{i=2}^n$  están contenidas en  $C_1$  y además todas las curvas  $C_j$  están fuera de  $C_i$  siempre que  $i \geq 2$ ;  $i < j$ . Entonces

$$\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{c_1} Pdx + Qdy - \sum_{i=2}^n \oint_{C_i} Pdx + Qdy$$

Siendo  $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

**5.5. Integrales de superficie**

**Definición** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región del plano limitada por una curva de Jordan y sea  $\vec{\sigma} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación continua y  $S$  un abierto que contiene a  $D$ . Entonces la imagen  $\vec{\sigma}(D)$  es una superficie paramétrica. La superficie es diferenciable, de clase  $C^k$ , etc. si lo son las funciones  $x = x(u, v)$ ;  $y = y(u, v)$ ;  $z = z(u, v)$  definidas por  $\vec{\sigma}$ . Una superficie se llama simple si y sólo si la aplicación  $\vec{\sigma}$  es inyectiva.

**Ejemplo** Las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \operatorname{sen} v \\ z &= u \end{aligned} \right\}$$

Definen un cono de ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$

**Ejemplo** La gráfica de una función  $z = f(x, y)$  se puede considerar como una superficie paramétrica de la forma  $\vec{\sigma}(u, v) = (u, v, f(u, v))$

**Definición** Dada una aplicación  $\vec{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se definen los vectores tangentes a la superficie como

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u, v_0); \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v)$$

y se define el producto vectorial fundamental como

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

El vector normal a la superficie es unitario, es decir

$$\vec{n} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}$$

Se llamará superficie regular a una superficie paramétrica en la cual  $\vec{n} \neq 0$

**Definición** Se define el elemento de área de una superficie paramétrica como

$$dS = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$$

Y el área de una superficie como

$$A = \int_D dS = \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$$

### 5.5.1. Integración de campos escalares sobre superficies

Sea  $S$  una superficie paramétrica en la forma  $\vec{S} = \vec{S}(u, v)$  y un campo escalar  $\phi(x, y, z)$ . Se define la integral de  $\phi$  sobre  $S$  como

$$\int_S \phi(x, y, z) dS = \int_D \phi(\vec{S}(u, v)) \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$$

### 5.5.2. Integración de campos vectoriales sobre superficies

Sea  $\vec{S}(u, v)$  una parametrización de una superficie. Se define el elemento de superficie como el producto del elemento de área por el vector normal unitario, por tanto

$$\vec{dS} = dS \cdot \vec{n} = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$$

La integral de un campo vectorial  $\vec{F}$  sobre la superficie  $S$ , o flujo de  $\vec{F}$  sobre  $S$  se define como

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{F}(S(u, v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) du dv$$

Es decir, se integra el producto escalar del campo vectorial sobre la superficie con el producto vectorial fundamental sobre el espacio de parámetros  $D$ . Para poder definir el flujo es necesario que la superficie sea orientable, esto es, que se pueda definir un vector normal orientado de forma consistente sobre la superficie. Un ejemplo de superficie no orientable es la banda de Möbius, obtenida al juntar los extremos de una banda de papel realizando antes un número impar de giros sobre ésta.

### 5.5.3. Teoremas de Stokes y Gauss

**Teorema 5.5.1** (Stokes). *Sea un campo vectorial  $\vec{F}$  definido sobre el abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$  y sea  $\vec{\sigma} : D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada cuya frontera es la curva  $C$ . Suponiendo que  $\vec{F}$  es de clase  $C^1$  y que  $\vec{\sigma}$  es  $C^2$  se tiene*

$$\int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observando desde la normal a la superficie, el sentido de la curva  $C$  es tal que deja a su izquierda la superficie al avanzar a través de ella.

La demostración pasa por calcular ambas integrales y aplicar en la segunda el teorema de Green antes visto.

**Ejemplo** Supongamos que dentro de la superficie  $S$  cuya frontera es  $C$  existen  $n$  curvas de Jordan  $C_i$  sin intersecciones entre ellas. Entonces

$$\int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Teorema 5.5.2** (Gauss). *Sea  $S$  una superficie orientable y cerrada y  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  sobre  $S$ . Entonces se tiene*

$$\int_V \text{div} \vec{F} \cdot d^3 \vec{x} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Donde  $V$  es la región en  $\mathbb{R}^3$  encerrada por la superficie cerrada  $S$

La demostración puede consultarse en cualquier libro de cálculo vectorial