PRODUCTE ESCALAR I ESPAIS EUCLIDIANS

Manel Bosch

Curs 2009-2010

Les propietats d'una forma bilineal són les següents, $\forall u, v \in E;\ \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \varphi : & E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \ \longmapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

- $\varphi(u, v + v') = \varphi(u, v) + \varphi(u, v')$.
- $\varphi(u + u', v) = \varphi(u, v) + \varphi(u', v)$.
- $\varphi(\lambda u, v) = \varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v)$.

Producte escalar euclidià: és una aplicació φ de $E \times E$ en $\mathbb{R}$ que és una **forma bilineal, simètrica i definida positiva**.

1. És bilineal perquè compleix les tres propietats descrites anteriorment.
2. És simètrica ja que, si considerem la següent base de E: $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$, tenim que la matriu del producte escalar és:

$$B = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & \cdots & e_1 e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n e_1 & \cdots & e_n e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & \cdots & e_1 e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n e_1 & \cdots & e_n e_n \end{pmatrix} = B^t$$

   és a dir que per a $u, v \in E$:

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u) \ \Leftrightarrow \ b_{ji} = \varphi(e_j, e_i) = \varphi(e_i, e_j) = b_{ij}$$

3. Definida positiva ja que:
   - $\varphi(u, u) \geq 0$
   - $\varphi(u, u) = 0 \ \Leftrightarrow \ u = \vec{0}$

Propietats mètriques bàsiques. Sigui E un espai vectorial:

- Definim la norma d'un vector com l'aplicació no lineal:

$$\begin{aligned} || \ || : & E \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ & u \ \longmapsto ||u|| \end{aligned}$$

  Amb les següents propietats:

  1. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$.
  2. $||ku|| = 0|k|||u||$.
  3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (desigualtat triangular).
  4. $||u|| = \sqrt{\varphi(u, u)} = \sqrt{u \cdot u}$.
  5. $|u \cdot v| \leq ||u|| \cdot ||v||$ (desigualtat, o lema, de Cauchy-Schwarz).

- Diem que un vector és unitari si $||u|| = 1 \;\Rightarrow\; \varphi(u,u) = 1$.
- Dos vectors $u, v \;\in\; E$ són ortogonals si $\varphi(u,v) = 0$. Per tant, el vector $\vec{0}$ és ortogonal a tots els vectors.
- Sempre que tinguem un vector $u \;\in\; E \mid u \neq \vec{0}$, podem obtenir un vector unitari u' com es mostra:

$$u' = \frac{u}{\sqrt{\varphi(u,u)}} = \frac{u}{\sqrt{u \cdot u}}$$

- Definim la distància entre dos vectors $p, q \in E$ com $\mathrm{d}(p,q) = ||\vec{pq}||$
- A partir del lema de Cauchy-Schwarz definim l'angle entre dos vectors com:

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}$$

Conceptes d'ortogonalitat.

- Dos vectors són ortogonals $u, v \in E$ entre si, si $u \cdot v = 0$.
- Un subconjunt S de E és ortogonal si qualsevol parell de vectors de S diferents són ortogonals. A més, si es compleix que $||u|| = 1$ $(\forall u \in S)$ direm que S és **ortonormal**.
- Si S és un conjunt de vectors ortogonals dos a dos S és linealment independent.
- Si $\dim E = n$ el nombre màxim de vectors ortogonals dos a dos és n.
- Sigui E un $\mathbb{R}-$espai vectorial de dimensión n dotat d'un producte escalar φ, es té que sempre existeix una base ortonormal de E.
- Si tenim una base $e_1, \ldots, e_n$ ortonormal, amb B com a matriu de φ, el procediment per trobar la matriu C de φ en una segona base $u_1, \ldots, u_n$ és el següent:

  Sabem que podem expressar ambdues bases l'una en funció de l'altra mitjançant les matrius P i Q de canvi de base directe i invers, respectivament; és a dir:

$$u_i = \sum_k p_i^k e_k \qquad e_k = \sum_i q_i^k u_i$$

  Per tant,

$$C = c_{ji} = \varphi(u_j, u_i) = \varphi\left(\sum_k p_j^k e_k, \sum_l p_i^l e_l\right) = \sum_k p_j^k \sum_l p_i^l \underbrace{(e_k e_l)}_{b_{kl}} = \sum_k p_j^k \sum_l b_{kl} p_i^l = P^t BP$$

$$C = P^t BP$$

Bases ortonormals. Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Demostrem, per inducció sobre r, que per a qualsevol $\mathbb{R}-$espai vectorial E de dimensió finita, sempre existeix una base ortonormal:

Sigui $e_1, \ldots, e_n$ una base qualsevol d'E, podem considerar els següents subespais:

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E_n$$

Aleshores, cadascun d'aquests subespais, està generat per:

$$E_1 =< e_1 >, \quad E_2 =< e_1, e_2 >, \quad \ldots, \quad E_n =< e_1, \ldots, e_n >$$

1. Comprovem que la hìpòtesi es compleix per al cas més senzill:

- Si $e_1 \neq \vec{0} \implies \exists\ u_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{e_1 e_1}}$. Per tant, u_1 és unitari i és una base ortonormal d'E_1. És a dir $E_1 =< e_1 >=< u_1 >$.

2. Suposem que la hipòtesi es compleix per a un determinat r:

$$E_r =< u_1, \dots, u_r > \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad E_{r+1} =< u_1, \dots, u_r, u_{r+1} >$$

3. Demostrem que es compleix per a $r+1$:

Sabem que $E_{r+1} =< e_1, \dots, e_r, e_{r+1} >$, aleshores, per hipòtesi, suposem que ja hem ortonormalitzat els r vectors anteriors, és a dir que $E_{r+1} =< u_1, \dots, u_r, e_{r+1} >$.

Aleshores, tenim que

$$u'_{r+1} = e_{r+1} + \lambda^1 u_1 + \ldots + \lambda^r u_r$$

Aquest u'_{r+1} ha de ser ortogonal a la resta dels r vectors, per tant:

$$\begin{aligned}
0 =& u_1 \cdot u'_{r+1} = u_1 \cdot e_{r+1} + \lambda^1 \underbrace{u_1 \cdot u_1}_{=1} + \lambda^2 \underbrace{u_1 u_2}_{=0} + \ldots + \lambda^n \underbrace{u_1 u_r}_{=0} \\
&\vdots \\
0 =& u_r \cdot u'_{r+1} = u_r \cdot e_{r+1} + \lambda^1 \underbrace{u_r \cdot u_1}_{=0} + \ldots + \lambda^{r-1} \underbrace{u_r \cdot u_{r-1}}_{=0} + \lambda^r \underbrace{u_r \cdot u_r}_{=1}
\end{aligned}$$

Per tant, es veu que $\lambda^i = -\varphi(u_i, e_{r+1})$

Un cop definit u'_{r+1}, sabem que tot el conjunt és linealment independent, per tant, només ens queda normalitzar-lo per a fer-lo unitari i obtindrem una base ortonormal, per tant, ens queda que:

$$E_{r+1} =< e_1, \dots, e_r, e_{r+1} >=< u_1, \dots, u_r, u_{r+1} >$$

Com volíem demostrar.

Per a qualsevol base ortonormal es compleix que $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$, sent δ_{ij} la Delta de Kronecker.

El producte vectorial:

Sigui E un espai vectorial de dimensió 3, amb una base e_1, e_2, e_3 ortonormal (qualsevol, però directa), per a definir el producte vectorial $(u \wedge v)$, buscem un vector $x \in E$ tal que

$$\forall w \in E w \cdot x = \det_{e_i}(u, v, w)$$

d'on $x = u \wedge v$. Aquest vector x, expressat en la base anterior és de la forma

$$x = (x \cdot e_1)e_1 + (x \cdot e_2)e_2 + (x \cdot e_3)e_3,$$

per tant, si hem dit que $x = u \wedge v$

$$\begin{aligned}
x = u \wedge v =& \det_{e_i}(u, v, e_1) + \det_{e_i}(u, v, e_2) + \det_{e_i}(u, v, e_3) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} \\
\approx& \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Propietats del producte vectorial.

1. Anticommutatiu: $u \wedge v = -v \wedge u$
2. Lineal: $(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$, a més $(ku \wedge v) = k(u \wedge v)$

3. $u \wedge v$ és ortogonal a u i v.
4. $u \wedge v = 0 \quad \Longleftrightarrow u, v$ són linealment dependents.
5. Si $u \wedge v \neq \vec{0}$, aleshores $\{u, v, u \wedge v\}$ és una base amb la mateixa orientació que $\{e_1, e_2, e_3\}$
6. $w \cdot (u \wedge v) = \det_{e_i}(u, v, w)$.

APLICACIONS ENTRE ESPAIS VECTORIALS

Sigui E un espai vectorial euclidià, considerem una aplicació lineal d'aquest espai vectorial a ell mateix (endomorfisme):

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto f(u) \\ v &\longmapsto f(v) \\ u \cdot v &\longmapsto f(u) \cdot f(v) \end{aligned}$$

La particularitat d'aquestes aplicacions és que conserven el producte escalar, la mètrica, la norma dels vectors... Les aplicacions que compleixen aquests requisists s'anomenen ISOMETRIES o APLICACIONS ORTOGONALS i són, les rotacions i les simetries (aplicacions molt restrictives). Com que el producte escalar es conserve, aquestes aplicacions són lineals i, a més, compleixen les següents propietats:

1. $||f(u)|| = ||u||$.
2. Si u, v són ortogonals, $f(u), f(v)$ són ortogonals.
3. f és bijectiva (només cal que sigui injectiva, ja que un endomorfisme duu implícita la exhaustivitat).
4. Els valors propis de f poden ser $+1$ o -1, tot i que pot no tenir-ne.
5. Si u, v són dos vectors propis amb valors propis diferents, u, v són ortogonals.
6. f és ortogonal $\Longleftrightarrow f(e_i)f(e_j) = e_ie_j$.
7. f és ortogonal $\Longleftrightarrow A^tGA = G$; on A és la matriu de f en la base $e_i, \ldots, e_n$ i G és la matriu del producte escalar.
8. Si tenim una base ortonormal es compleix que $G = I$.
9. Si $M^{-1} = M^t$, diem que M és ortogonal.
10. Si A és la matriu de f en una base ortonormal $\det A = \pm 1$

Descriurem per $O(E)$ el conjunt d'aplicacions ortogonals d'E. És un grup amb composició, és a dir, si $f, g \in O(E)$ tenim que $g \circ f \in O(E)$. La funció inversa sempre existeix (ap. bijectives).

Sigui $f : E \longrightarrow F$, amb E i F espais euclidians, tenim que $u \cdot v = f(u) \cdot f(v)$, i E i F són isomètrics si f és ortogonal. A més, perquè siguin isomètrics $\dim E = \dim F$.

TIPUS D'APLICACIONS ORTOGONALS.

Distingim tres casos:

1. Isometries de la recta: $0(1) = \{I, -I\}$.
2. Isometries del pla: $O(2)$.
3. Isometries de l'espai: $O(3)$.

2. ISOMETRIES DEL PLA, $O(2)$.

Considerem e_1, e_2 una base ortonormal i f una aplicació ortogonal amb matriu A. Depenent del valor del determinant d'aquesta matriu (1 o -1), ens trobem amb els següents dos casos:

2.1 SIMETRIES; $\det A = -1$:

En aquest cas, la matriu A és de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ amb } \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Diem que $f \in O^-(2)$, que és el grup de les simetries. Sempre existeix una base ortonormal on la matriu pren la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Com podem comprovar, les simetries tenen els valors propis $+1$ i -1 (es pot comprovar fent el polinomi característic de la matriu de la simetria, tenint en compte que $a^2 + b^2 = 1$). Es creen dos subespais $E_1 \in \mathrm{Nuc}(f - I)$ i E_{-1}, per tant:

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = a+1; \quad y = b;$$

Per tant, tenim que $E_1 =< (a+1, b) >$ i, a més, és l'eix de la simetria. I $E_{-1} =< (-b, a+1) >$.

Com que f és simètrica, tenim que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ també formarà una base ortonormal de E, però la seva orientació serà contrària a e_1, e_2 (causa: $\det A = -1$).

2.2 ROTACIONS, $\det A = +1$

En aquest cas, la matriu A és de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ amb } \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Diem que $f \in O^+(2)$, que és el grup de les rotacions. Aquest grup commuta, a més, si $g, f \in O^+(2)$ tenim qeu $g \circ f \in O^+(2)$ Con que $a^2 + b^2 = 1$, podem veure que ambdos valors estan compresos entre 1 i -1, per tant, la matriu A, pot ser expressada de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

En general, $f \in O^+(2)$ no té valors propis, si en té, només poden ser $+1$ o -1 (per tant, la matriu és I o bé $-I$).

La matriu A és (gairebé) invariant, gairebé perquè, tot i que a sí que és totalment invariant, tenim b pot canviar de signe depenent de la orientació de les bases (si tenen la mateixa orientació $+1$, si no -1).

Si u, v són vectors unitaris, hi ha una única rotació tal que $f(u) = v$.

Quant als angles de la rotació, és important tenir en compte que, si $f(u) = v$, aleshores $\widehat{uv} = \widehat{uf(u)}$. Per trobar l'angle φ de rotació a partir de la matriu de l'aplicació: $\mathrm{tr} A = 2\cos\varphi$.

Aleshores, sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de tots els angles, tenim que:

$$\begin{aligned}(O^+(2),\circ) &\longrightarrow (\mathcal{A},+)\\ f &\longmapsto \widehat{uf(u)}\\ g &\longmapsto \widehat{ug(u)}\\ g\circ f &\longmapsto \widehat{ug(f(u))} = \widehat{uf(u)} + \widehat{f(u)f(f(u))}\\ I &\longmapsto \widehat{uu} = 0\\ f^{-1} &\longmapsto \widehat{uf^{-1}(u)} = \widehat{f(u)u} = -\widehat{uf(u)}\end{aligned}$$

3. ISOMETRIES DE L'ESPAI, $O(3)$

Sigui $f \in O(3)$ de nou, tornem a considerar dos casos segons el valor del dereminant.

3.1 ROTACIONS; $\det f = +1$

Sempre existeix un vector propi de valor propi $+1$ (el polinomi característic és de grau tres, per tant, té sempre una arrel real). Si tenim la següent base ortonormal u_1, u_2, u_3, aleshores, u_1 és el vector propi de valor propi $+1$ ($f(u_1) = u_1$) i és, també, l'eix de la rotació.

$$\text{matriu} \quad \text{de} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

La matriu, ens descriu una rotació d'angle φ i eix $< u_1 >$. Per a trobar el valor de l'angle: $\mathrm{tr} = 1 + 2\cos\varphi$. Com que l'eix de la rotació és el vector propi de valor propi $+1$, si aquest vector no és de la base s'haurà d'ortonormalitzar.

En resum, sigui e_1, e_2, e_3 una base ortonormal qualsevol i A la matriu d'una aplicació f ortogonal, tenima que $A^t = A^-1$ (fet que ens ha permès trobar com és la matriu), a més $\det A = +1$.

- Per buscar l'eix de la rotació hem de buscar el vector propi amb valor propi $+1$:

$$\mathrm{Nuc}(A - I) =< u_1 >\Longrightarrow \qquad \text{dimensió} \quad 1.$$

- L'angle de la rotació és φ; $\mathrm{tr} = 1 + 2\cos\varphi$.
- Ens queda una base ortonormal (potser cal aplicar Gram-Schmidt per obtenir-la) en la qual, el primer vector és l'eix de la rotació, i els altres dos, són otrogonals a u_1.

3.2 CASOS EN QUÈ $\det f = -1$

Si $\det f = -1$ sempré té el valor propi -1, i en conseqüència, donada una base u_1, u_2, u_3, tindrem que $f(u_1) = -u_1$. És a dir, u_1 és el vector propi de valor propi -1, en aquest cas, per trobar-lo, fem $\mathrm{Nuc}(f + I) =< u_1 >$. Quant a u_2, u_3, tenim que $\det f(u_2, u_3) = +1$, per tant $< f(u_2, u_3) >\in O^+(2)$, és a dir, és una rotació en el pla.

La matriu de f és la següent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Per tant, tenim una simteria respecte el pla $\perp < u_1 >$ i una rotació d'angle φ i eix $< u_1 >$. Si $\varphi = 0$, diem que tenim una simetriua pura i, si $\varphi = \pi$ diem que es tracta d'una simetria puntual.