FUERZA CENTRÍPETA Y FUERZA CENTRÍFUGA

RODRIGO BRAVO

Como sabemos, los conceptos de *fuerza centrípeta* y *fuerza centrífuga* son fundamentales en Mecánica al estudiar la dinámica del movimiento curvilíneo. Es importante darse cuenta de que, en realidad, ambas fuerzas representan exactamente lo mismo según se observe la situación física desde un sistema de referencia u otro. Esto quiere decir que nunca podemos mezclarlas en el planteamiento de un problema: si aparece una de ellas, entonces no puede aparecer la otra. Por desgracia algunos textos (y algunos profesores) no aclaran bien esta idea y, al no entenderlo bien los alumnos, plantean mal los problemas relacionados. Por eso, voy a intentar explicar a continuación ambos conceptos. Espero que este artículo aclare las dudas y nadie me acabe incluyendo algún día en esa lista de profesores que contribuyen a la confusión.

EL CONCEPTO DE FUERZA CENTRÍPETA

Siempre que una masa puntual describe una trayectoria curva existe una fuerza actuando sobre ella, incluso aunque sea constante el módulo de la velocidad. Esa fuerza es la que llamamos *fuerza centrípeta*, que quiere decir *hacia el centro*. Así, por ejemplo, si la masa puntual describe una circunferencia a velocidad constante, existe una fuerza que está actuando sobre ella y es responsable de que desvíe continuamente su dirección. Recordemos que la primera ley de Newton dice que todo cuerpo mantiene un estado de movimiento rectilíneo y uniforme mientras no actúen sobre él fuerzas. Como el movimiento circular no es rectilíneo (aunque sí pueda ser uniforme en velocidad) vemos que tiene que existir una fuerza para no contradecir a Newton ¿no es así?

Para expresar con más precisión esta idea necesitamos recurrir al lenguaje de las matemáticas. Vamos a ver cómo podemos describir matemáticamente lo que está sucediendo. Para ello vamos a analizar la situación desde el punto de vista de la Cinemática, es decir, estudiando el movimiento por sí mismo, como relación matemática entre espacio y tiempo, sin entrar a considerar cuál es la causa de dicha relación (o sea sin plantearnos qué fuerzas están actuando).

En una trayectoria curva el vector velocidad $\vec{v}$ tiene siempre dirección *tangente* a la trayectoria. Si llamamos $\hat{\tau}$ al vector unitario con dirección tangente, como se representa en la figura 1, entonces podemos escribir

$$\vec{v} = v\hat{\tau}$$

Por su parte, como sabemos, el vector aceleración $\vec{a}$ es la derivada temporal del vector velocidad, es decir

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\hat{\tau}) = \dot{v}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}$$

Observemos detenidamente el último miembro de la igualdad. Vemos que la aceleración tiene dos componentes:

1) $\dot{v}\hat{\tau}$, que es una componente de dirección tangente a la trayectoria y que contabiliza la variación temporal del módulo del vector velocidad.

2) $v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}$, que es una componente de dirección según el vector $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}$ y que contabiliza la variación temporal de la dirección del vector velocidad.

Como $\hat{\tau}$ es un vector unitario, su módulo es constante durante el movimiento, pero en cambio su dirección va variando continuamente y por ello su derivada temporal no es cero (sí que sería cero si el vector unitario fuera fijo, como sucede con los vectores unitarios de los ejes cartesianos $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$).

Para aclarar *quién es* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}$ hemos dibujado la figura 1, en la que una masa puntual se mueve en una trayectoria circular de radio r y centro en el punto O. Observemos que en un instante concreto pasa por el punto P_1 y que un instante posterior pasa por el punto P_2. Llamemos Δt al tiempo transcurrido entre ambos instantes y llamemos $\Delta\theta$ al ángulo recorrido durante Δt.

En P_1 el vector unitario tangente es $\hat{\tau}_1$ y en P_2 es $\hat{\tau}_2$. Por tanto el *incremento* del vector unitario tangente entre ambos instantes es $\Delta\hat{\tau} = \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1$, que aparece dibujado en color rojo. Como tanto $\hat{\tau}_1$ como $\hat{\tau}_2$ tienen módulo unidad, el módulo de $\Delta\hat{\tau}$ es $2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ (comprobar esto teniendo en cuenta la geometría de la figura). Esta cantidad tiende a $\Delta\theta$ cuando $\Delta\theta \to 0$ y la dirección de $\Delta\hat{\tau}$, cuando $\Delta\theta \to 0$, tiende a ser según el radio OP_1 (apuntando hacia el centro de la circunferencia O). Llamando al vector unitario según la dirección radial (hacia fuera) $\hat{r}$, todo esto se expresa

$$\Delta\hat{\tau} \xrightarrow{\Delta\theta\to 0} -\Delta\theta\hat{r}$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de derivada de un vector, calculamos

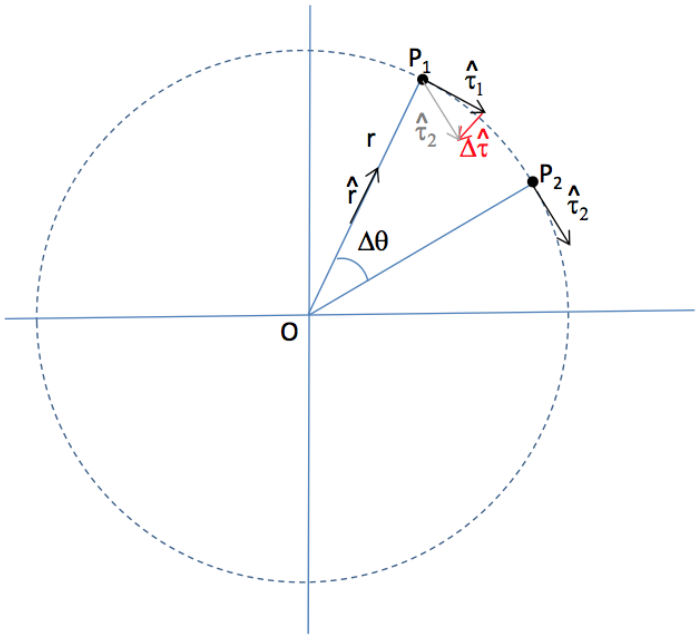

Figura 1. *Gráfico para calcular la derivada temporal del vector tangente*

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}(-\hat{r})$$

El incremento de ángulo $\Delta\theta$ recorrido durante Δt tiende a ser $\omega \Delta t = \frac{v}{r}\Delta t$, donde ω es la velocidad angular (instantánea) del movimiento circular en P_1, con lo que

$$\frac{d}{dt}\hat{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{v}{r}\Delta t}{\Delta t}(-\hat{r}) = -\frac{v}{r}\hat{r}$$

En definitiva hemos demostrado que la aceleración (que es un vector) puede expresarse como suma de dos componentes:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} - \frac{v^2}{r}\hat{r}$$

La primera componente, llamada *aceleración tangencial*, tiene dirección tangente a la trayectoria y contabiliza la variación temporal en el módulo de la velocidad. La segunda componente, $-\frac{v^2}{r}\hat{r}$, recibe el nombre de *aceleración centrípeta* tiene dirección radial (normal a la trayectoria y dirigida hacia el centro instantáneo de curvatura) y contabiliza la variación temporal en la dirección de la velocidad.

Es importante darse cuenta de que en realidad cualquier trayectoria curva puede aproximarse todo lo que queramos por una sucesión de arcos de circunferencia de ángulos suficientemente pequeños, por lo que la situación representada tiene validez general, en sentido instantáneo, al hacer $\Delta\theta \to 0$, con independencia de que r (radio de curvatura en cada instante) sea variable o no.

Como decíamos, esta descripción matemática de la situación es meramente *cinemática* porque hasta ahora no hemos hablado de fuerzas, pero el momento de hacerlo ha llegado y vamos a invocar la segunda ley de Newton:

La aceleración experimentada por un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza ejercida sobre él e inversamente proporcional a su masa. En otras palabras:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Esta es la ley física que nos permite siempre pasar de una descripción *cinemática* (aceleración) a una descripción *dinámica* (fuerza). En otras palabras: una vez que hemos calculado la aceleración experimentada por nuestra masa puntual en la situación de la figura 1, sabemos que la fuerza que está experimentando es

$$\vec{F} = m\dot{v}\hat{\tau} - m\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

, que consiste en una componente tangencial y otra radial, obtenidas al multiplicar por la masa cada una de las componentes de la aceleración. La componente radial

$$\vec{F_c} = -m\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

recibe el nombre de *fuerza centrípeta*. La fuerza centrípeta es la que obliga a la masa m a describir una trayectoria curva, venciendo su inercia, es decir, su tendencia natural (como dice la primera ley de Newton) a permanecer en movimiento rectilíneo uniforme. Fijémonos en que sigue existiendo fuerza centrípeta aun en el caso de que el módulo de la velocidad sea constante durante el movimiento curvilíneo ($\dot{v} = 0$).

Aquí es importante detenerse en una idea: al llamar *centrípeta* a la fuerza estamos subrayando el *efecto* de la fuerza más que su *causa* o naturaleza. El hecho de que un cuerpo describa una trayectoria circular alrededor de un punto fijo puede deberse a muchos tipos de interacciones físicas (o sea, causas) diferentes: por ejemplo puede deberse a que hay una cuerda fija entre el centro de giro y el cuerpo que gira, de forma que la tensión de la cuerda actúa como fuerza centrípeta en ese caso. Otro ejemplo sería la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un satélite que describe una órbita circular: en ese caso la fuerza de la gravedad se comporta como fuerza centrípeta. Ambos ejemplos son situaciones muy diferentes y sin embargo tienen en común que en el movimiento a estudiar existe una fuerza centrípeta que puede describirse matemáticamente de la forma que hemos visto antes (¡los esfuerzos matemáticos son muy reaprovechables en Física!).

EL CONCEPTO DE FUERZA CENTRÍFUGA

Para explicar el concepto de *fuerza centrífuga* vamos a contar un cuento. Su título es *Pepe y el autobusero loco*:

> Pepe se montó en el autobús como todas las tardes. Aquella vez, sin embargo, el conductor no era el de siempre. Esta vez era un conductor nuevo, de mediana edad, que sonreía de un modo extraño. A Pepe le produjo cierta inquietud. Cuando faltaba poco para llegar a su parada, el autobús entró en una rotonda. En ese momento el conductor pisó a fondo el acelerador soltando una risotada y el autobús comenzó a dar vueltas a la rotonda a gran velocidad: una vuelta, dos, tres . . . ¡qué locura! Era evidente que el autobusero no estaba bien de la cabeza. Indiferente a los gritos de los pasajeros, continuó dando vueltas a la rotonda hasta que por fin un par de viajeros decididos se echaron sobre él y lo redujeron mientras otro se hacía cargo del volante y trataba de frenar el autobús. Al final consiguieron detener el vehículo y todo quedó en un susto. La policía municipal no tardó en acudir. Uno de los agentes tomó declaración sobre lo sucedido a Pepe y a un testigo ocular, Ana, que era estudiante de Física (y con ganas de lucir sus conocimientos), y que se encontraba inmóvil en la acera de la rotonda cuando se produjo el suceso. Para su sorpresa, la policía encontraba contradictorias las dos declaraciones y continuó interrogando a los testigos hasta que se dio cuenta de que en el fondo las dos declaraciones sólo eran contradictorias *en apariencia*. Éstas eran:
>
> Declaración de Pepe:
>
> *Me encontraba dentro del autobús, de pie, agarrado a una barra, cuando de pronto noté una fuerza que me arrastraba hacia la parte derecha del autobús. Entonces, tuve que ejercer fuerza hacia la izquierda, apretando mis pies en el suelo y agarrándome a la barra, para lograr el equilibrio y permanecer quieto en mi posición.*

> Declaración de Ana:
>
> *Me encontraba quieta en la acera cuando el autobús comenzó a dar vueltas a la rotonda a gran velocidad. Como estudio Física, enseguida comprendí que el autobús ejercía en los pasajeros una gran fuerza centrípeta dirigida hacia la izquierda del autobús, transmitida a través del suelo y las barras a las que iban agarrados, y esa fuerza les obligaba a girar alrededor de la rotonda sin remedio.*
>
> Lo que parecía contradictorio a la policía era que, según un testigo (Pepe), la fuerza que el autobús transmitía a los pasajeros era dirigida hacia el costado derecho del autobús, mientras que, según el otro (Ana), el autobús transmitía a los pasajeros una fuerza dirigida hacia el costado izquierdo. En un principio era evidente que los dos no podían decir la verdad ¿O sí?

Para analizar la paradoja que expone el cuento anterior observemos las figuras 2 y 3. En ellas se representa el autobús, dibujado como un rectángulo, y a Pepe en su interior (dibujado como un pequeño circulito). Si la situación se observa desde el sistema de referencia S fijo en la calle, se puede describir así (ver figura 2):

> Pepe describe un movimiento circular a lo largo de la rotonda. Dicho movimiento es causado por la fuerza centrípeta ($\vec{F_c}$) que el autobús le transmite a Pepe a través del contacto con sus zapatos con el suelo y el agarre de Pepe a la barra.

En cambio, si la situación se observa desde el sistema de referencia $S´$ fijo en el autobús, la descripción de lo que sucede es ésta (ver figura 3):

> Pepe experimenta una fuerza centrífuga ($\vec{F_{cf}}$) dirigida hacia el costado derecho del autobús. Para no ser arrastrado hacia este costado, Pepe ejerce una fuerza igual y de sentido contrario ($\vec{F_{ag}}$) mediante el agarre de sus zapatos al suelo y su mano a la barra. Así logra el equilibrio de fuerzas y permanece en reposo.

Puesto que $S´$es un sistema de referencia *no inercial* respecto a S, es decir, tal que su movimiento relativo a S no es rectilíneo y uniforme, sabemos que la descripción de lo que sucede, en términos de fuerzas, no puede ser la misma. La *fuerza centrífuga* aparece sólo cuando se describe la situación desde la perspectiva de S´. Para visualizar esto más claramente, imaginemos que el suelo del autobús fuera de hielo y no hubiera dónde agarrarse en su interior: en ese caso el pobre Pepe

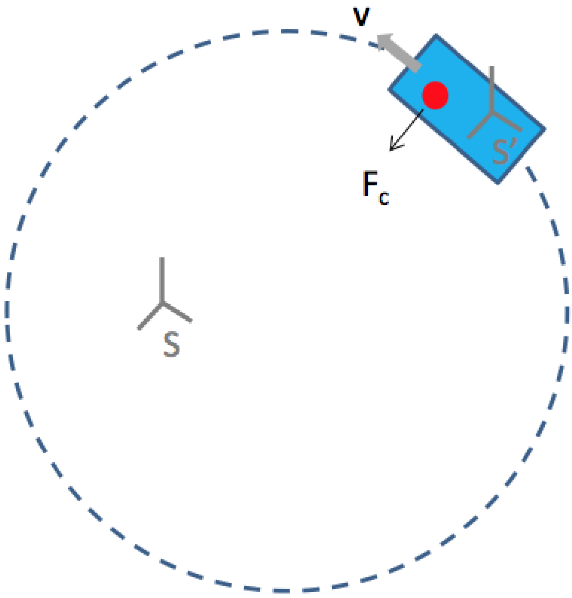

FIGURA 2. *Situación física observada desde el sistema de referencia en reposo S*

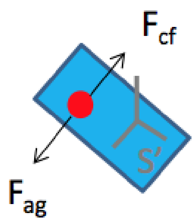

FIGURA 3. *Situación física observada desde el sistema de referencia fijo en el autobús S´*

habría acabado estampado contra el costado interior derecho del autobús. Ahora imaginemos que la situación no es tan cruel y que existe una cuerda atada al costado interior izquierdo del autobús, a la que Pepe se agarra firmemente mientras el autobús da vueltas en la rotonda. En ese caso, Pepe *notaría* (y podría medirla con un dinamómetro) que existe una tensión en la cuerda a la que está agarrado y que tira de él hacia el lado izquierdo. La medida con el dinamómetro le daría exactamente $m\frac{v^2}{r}$, con m la masa de su cuerpo, v, la velocidad del autobús y r el radio de la rotonda. Ahora bien, como Pepe se encuentra en reposo en su sistema de referencia (S´), Pepe tiene que sentir una segunda fuerza que tira de él hacia el costado derecho y que le permite estar en equilibrio. Esa segunda fuerza dirigida hacia fuera es la *fuerza centrífuga*, que quiere decir *que huye del centro*. Y puesto que hay equilibrio de fuerzas, su valor será también exactamente $m\frac{v^2}{r}$.

En conclusión, la fuerza centrífuga es una fuerza *ficticia* en el sentido de que sólo existe cuando se observa en el sistema de referencia no inercial que gira con el cuerpo bajo estudio. Su valor es igual al de la fuerza centrípeta que se observa desde el sistema en reposo en el cual la masa gira. Por tanto la fuerza centrífuga sólo debe aparecer en el planteamiento de un problema cuando el sistema en el que planteamos las ecuaciones de fuerzas sea el primero. Si planteamos las ecuaciones en el segundo sistema, entonces debemos contabilizar sólo la fuerza centrípeta y olvidarnos de la centrífuga. Veamos un último problema-ejemplo para ilustrar esta idea:

> Un niño está montado en un carrusel de la feria, en un asiento sujeto al techo giratorio del carrusel mediante dos cuerdas de longitud L, una a cada lado del asiento. Antes de que empiece a girar, las cuerdas están verticales y su tensión es igual al peso del asiento más el niño (m). La distancia al centro de giro en esa situación es R. Cuando el carrusel se pone a girar con velocidad angular ω, las cuerdas forman un cierto ángulo con la vertical, que llamamos ϕ. ¿Cuánto vale ϕ en función de los demás parámetros ω, R, L y m?

El planteamiento del problema conducirá a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son el ángulo ϕ y la tensión de las cuerdas T.

* *Planteamiento del problema en el sistema en reposo fuera del carrusel*:

Verticalmente, el peso se equilibra con la componente vertical de la tensión:

$$mg = T\cos\phi \tag{1}$$

Horizontalmente, la componente horizontal de la tensión está actuando como fuerza centrípeta y es la causa de la aceleración centrípeta del niño en el carrusel:

$$T \sin\phi = m\frac{[\omega(R + L\sin\phi)]^2}{R + L\sin\phi} \tag{2}$$

* *Planteamiento del problema en el sistema que gira con carrusel*:

En este sistema, el niño está en reposo. Por tanto hay equilibrio de fuerzas tanto horizontal como verticalmente.
Verticalmente, el peso se equilibra con la componente vertical de la tensión:

$$mg = T\cos\phi \tag{3}$$

Horizontalmente, la componente horizontal de la tensión (que tira del niño hacia el centro del carrusel) es igual a la fuerza centrífuga (que tira del niño hacia fuera):

$$T \sin\phi = m\frac{[\omega(R + L\sin\phi)]^2}{R + L\sin\phi} \tag{4}$$

Comparando (1)+(2) y (3)+(4), comprobamos que el sistema de ecuaciones es exactamente el mismo en los dos sistemas de referencia y que lo único que cambia es la interpretación física de la ecuación de fuerzas horizontal. Por lo tanto la solución para el ángulo ϕ (y para la tensión T) será la misma en ambos casos, aunque aquí no vamos a calcularla, ya que le propósito era sólo mostrar cómo los conceptos de fuerzas centrípeta y centrífuga aparecen o no en el planteamiento dependiendo del sistema en que éste se haga.