DUALIDAD Y ORTOGONALIDAD

Como es bien sabido, a cada aplicación lineal $f: E \to F$ se le asocia una matriz $m \times n$, siendo $n = \dim E$ y $m = \dim F$ que depende de las bases escogidas de ambos espacios vectoriales. De hecho, fijadas unas K-bases finitas $\{u_i\}$ de E y $\{v_i\}$ de F la matriz asociada a f es única y por tanto uno podría pensar que hay una correspondencia (biyectiva) entre las matrices de $M(m, n, K)$ y las aplicaciones lineales entre los espacios E y F, que denotaremos $\mathcal{L}(E, F)$ por comodidad. No es difícil ver que $\mathcal{L}(E, F)$ es un subespacio vectorial del espacio de las aplicaciones, por lo que admitirá una base finita. En general, con las notaciones anteriores, las aplicaciones

$$f_{ij}(u_k) \coloneqq v_j, \ si\ k = i \quad \text{ó} \quad f_{ij}(u_k) \coloneqq 0, si\ k \neq i$$

lo que hacen es mandar el elemento i-ésimo de la base de E al elemento j-ésimo de la de F y una rápida observación nos muestra que tienen por matriz asociada la E_{ij} (la matriz elemental con un 1 en la posición ij y ceros en el resto). Basta comprobar que estas matrices son base de $\mathcal{L}(E, F)$, es decir, que dada cualquier aplicación lineal $f: E \to F$ se puede poner como una combinación lineal de las f_{ij}, $f = \sum_{ij} \alpha_{ij} f_{ij}$ viendo a partir de las definiciones que a cualquier elemento u_k de la base de E, $f(u_k) = \sum_{ij} \alpha_{ij} f_{ij}\,(u_k)$ (generan) y además viendo que si cogemos una combinación lineal nula $\sum_{ij} \alpha_{ij} f_{ij} = 0$, estas mandarán a cualquier elemento de la base de E al cero y de ahí deducir que los coeficientes $\alpha_{ij} = 0$ (son linealmente independientes). Con esto, el conjunto de las aplicaciones $\{f_{ij}\}$ son una base de $\mathcal{L}(E, F)$ y como $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ se tiene que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim M(m, n, K) = mn$ y tenemos el isomorfismo entre los espacios $\mathcal{L}(E, F) \cong M(m, n, K)$ dado por la biasignación $f_{ij} \leftrightarrow E_{ij}$.

ESPACIO DUAL

Darle estructura de espacio vectorial al conjunto de aplicaciones lineales entre dos espacios es muy interesante, pero resulta algo engorroso trabajar con doble subíndice. Nos centraremos en el caso particular en que el espacio F sea el propio cuerpo K (que lo miraremos como un espacio vectorial de dimensión 1). Las aplicaciones lineales que van de un espacio E a K las llamaremos formas (lineales). Un ejemplo de forma lineal sería la traza de una matriz, que fijada $A = (a_{ij}) \in M(n, n, \mathbb{R})$ me da $tr(A) \coloneqq \sum_i a_{ii} \in \mathbb{R}$. Otro ejemplo sería, dado un conjunto de observaciones $x_1, \dots, x_n$, podemos pensarlas como un vector de $\mathbb{R}^n$ por lo que la forma lineal "media aritmética" me convierte un vector de $\mathbb{R}^n$ en un número real (comprobad que estos ejemplos son lineales). Como el cuerpo K generalmente se sobreentiende, no hace falta explicitarlo y al conjunto de formas $\mathcal{L}(E, K)$ lo denotaremos E^* y le diremos el espacio dual de E.

De forma similar a lo anterior, para buscarle una base a E^* intentaremos aprovecharnos de la ya conocida base de aplicaciones f_{ij}. Recordemos que lo que hacíamos era mandar uno por uno los elementos de la base de E a los de F, pero ahora nuestro espacio F es K que tiene por base $\{1\}$, por lo que nuestra nueva base no necesitará el subíndice j. Así que serán n aplicaciones f_i definidas por

$$f_i(u_j) = 1, si\ i = j \quad \text{ó} \quad f_i(u_j) = 0, si\ i \neq j$$

Dicho con palabras, son aplicaciones tales que la i-ésima manda al i-ésimo elemento de la base de E al 1, y el resto al cero. Por abreviar notación, utilizaremos la delta de Kronecker $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases}$, y dado que las aplicaciones f_i son base de E^* y dependen exclusivamente de la base de E u_i, las denotaremos $f_i = u_i^*$ y diremos que la base $\{u_i^*\}$ de E^* es la base dual de $\{u_i\}$ de E y está definida por $u_i^*(u_i) = \delta_{ij}$.

Una observación importante es que las formas u_i^* dependen de toda la base de E. Así, modificar tan solo un elemento u_j de la base de E podría hacernos pensar que solo modificará su correspondiente forma dual u_j^*, pero esto en general no es cierto ya que podría modificar completamente la base dual. El hecho de que los espacios E y E^* tengan la misma dimensión nos hace ver que son isomorfos, $E \cong E^*$. No obstante, el isomorfismo no es natural ya que depende de la base escogida. Todo y que la observación parezca baladí, no tener un isomorfismo natural entre dos espacios vectoriales es un problema, pues dado un vector (un elemento cualquiera de E) no podemos asignarle una forma (de E^*) de manera general y sin asignar una base previamente, ni viceversa. Por tanto, todo y que E y E^* son isomorfos (tienen la misma forma) no podemos decir que "son la misma cosa" y por ello hay que estudiar el espacio dual en las asignaturas de álgebra.

LA APLICACIÓN DUAL

Hasta ahora, dado un espacio vectorial E hemos definido su espacio dual E^* y dada una base $\{u_i\}$ de E hemos definido su base dual $\{u_i^*\}$ de E^*. Ahora nos interesaremos en, dada una aplicación lineal $f: E \to F$ definir una aplicación (lineal) entre los espacios duales E^* y F^*. Obviamente aplicaciones lineales entre dos espacios duales hay muchas. De hecho, como los duales tienen la misma dimensión que E y F, $\dim \mathcal{L}(E^*, F^*) = \dim \mathcal{L}(E, F)$ y por tanto a cualquier aplicación lineal podemos asociarle otra entre los duales. Nos interesa en particular asignarle una aplicación lineal entre duales a la aplicación $f: E \to F$, de manera que podamos encontrar una relación sencilla entre las matrices asociadas a ambas aplicaciones.

Consideremos el esquema $E \underbrace{\to}_{f} F \underbrace{\to}_{\omega} K$. Se tiene que si $f: E \to F$ es una aplicación lineal y $\omega: F \to K$ es una forma lineal, entonces la composición $\omega \circ f: E \to K$ es una forma lineal. Y como $\omega \in F^*$ y $\omega \circ f \in E^*$ tenemos que, fijada $f: E \to F$, la asignación $\omega \mapsto \omega \circ f$ podemos pensarla como una aplicación $f^*: F^* \to E^*$ que la llamaremos la aplicación dual de f.

Si fijamos unas bases $\{u_i\}$ de E y $\{v_i\}$ de F la matriz asociada a f la llamaremos $A = (a_{ij})$. Queremos ver qué forma tiene la matriz $B = (b_{ij})$ de f^* en las bases $\{v_i^*\}$ de F^* y $\{u_i^*\}\ de\ E^*$. Como sabemos, $u_r^*(u_i) = \delta_{ri}$, por lo que tenemos que el elemento b_{ij} de B lo podemos escribir como

$$b_{ij} = b_{1j} \overbrace{u_1^*(u_i)}^{=0} + \cdots + b_{ij} \overbrace{u_i^*(u_i)}^{=1} + \cdots + b_{nj} \overbrace{u_n^*(u_i)}^{=0} = \sum_{r=1}^{n} b_{rj} u_r^*(u_i)$$

Por otro lado, por la definición de la matriz B, las imágenes por f^* de un elemento de la base v_i^* serán una combinación lineal de elementos de la base u_i^*, $f^*(v_j^*) = \sum_{r=1}^{n} b_{rj} u_r^*$ de manera que

$$b_{ij} = \left(f^*(v_j^*)\right)(u_i) = (v_j^* \circ f)(u_i) = v_j^*(f(u_i))$$

donde hemos tenido en cuenta que $f^*(v_j^*) = v_j^* \circ f$ que es la definición de la aplicación dual. Finalmente, como $f: E \to F$ tiene por matriz asociada $A = (a_{ij})$, de la definición tenemos que

$f(u_i) = \sum_{s=1}^{m} a_{si} v_s$ y por ser v_j^* una forma lineal

$$v_j^*(f(u_i)) = v_j^* \sum_{s=1}^{m} a_{si} v_s = \sum_{s=1}^{m} a_{si} v_j^*(v_s) = a_{ji}$$

Hemos llegado a la igualdad $b_{ij} = a_{ji}$ por lo que se tiene el sorprendente resultado $B = A^t$.

ESPACIO BIDUAL

Todo buen matemático busca generalizar un resultado en la medida de lo posible. Por tanto, si para cada espacio vectorial E hemos definido su espacio dual E^* que es también un espacio vectorial, es inmediato darse cuenta que podemos definir el espacio dual de E^*, que lo representaremos por E^{**} y le llamaremos el espacio bidual de E. Los elementos de E^{**} serán "formas de formas". Del mismo modo, como $E \cong E^*$, se tendrá que $E^* \cong E^{**}$ y por la transitividad de $\cong$ es $E \cong E^{**}$.

Además, dada $f: E \to F$ lineal definíamos la aplicación dual $f^*: F^* \to E^*$, por lo que dada f^* podemos definir la aplicación bidual $f^{**}: E^{**} \to F^{**}$ que tendrá por matriz asociada $(A^t)^t = A$. Todo y que la matriz A de f depende de las bases escogidas, la igualdad $f = f^{**}$ no depende de las bases (cualquier cambio de base en la matriz de f cambiará de igual manera la matriz de f^{**}), lo que nos induce a pensar que el isomorfismo $E \cong E^{**}$ ¡es natural!, a pesar de que los isomorfismos $E \cong E^*$ y $E^* \cong E^{**}$ no lo sean. Por extraño que parezca, podemos asociar de manera natural vectores a "formas de formas", de manera que el espacio bidual E^{**} podemos decir que es igual que E y olvidarnos de que existe.

Uno podría pensar que es inútil molestarse en estudiar algo que no tiene razón de ser. Pero lo interesante de este tema es precisamente eso, ver que más allá del dual no hay nada y la generalización de definirle duales a duales no aporta nada nuevo. Así, si yo defino el dual del dual del dual…, digámosle el espacio n-dual, éste será E si n es par y será E^* si n es impar. En el universo de los espacios vectoriales hay vectores y formas, nada más.

SUBESPACIO ORTOGONAL

Como ya se sabe, podemos pensar geométricamente en un subespacio vectorial H de E como una variedad lineal que pasa por el origen ($0 \in H$). Así, un subespacio vectorial de dimensión 1 podemos pensarlo como una recta vectorial, uno de dimensión 2 como un plano, etc… Entre dichos espacios habíamos definido algunas operaciones, como la suma o la intersección, cuya interpretación geométrica es clara. Del mismo modo, sabemos que dado un subespacio vectorial H de E, siempre existía un subespacio complementario H' tal que $H \oplus H' = E$. De hecho, H' no es único y la variedad de espacios complementarios podemos pensarla como todos aquellos que cortan a H oblicuamente. Por ejemplo, si $E = \mathbb{R}^3$ y H es un plano vectorial (dimensión 2), se tiene que cualquier complementario es una recta de dimensión 1 que corte al plano en un punto. No obstante, entre todas esas rectas hay solo una que es perpendicular al plano. Diremos que esa recta es el subespacio ortogonal de H. De pequeños nos dijeron que dos vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v}$ son perpendiculares si, y solo si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, y esta es la condición que imponíamos para buscar variedades ortogonales. En general, el producto escalar, que denotaré $\langle , \rangle$ es un caso particular de forma bilineal: $\langle , \rangle : E \times F \to K$ de manera que dados $u \in E$ y $v \in F$ se tiene la asignación $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in K$, siendo lineal en cada componente. Así, definiremos el subespacio ortogonal $H^\perp$ de $H \subseteq E$ como

$$H^\perp := \{v \in E \mid \forall u \in H, \langle u, v \rangle = 0\}$$

Es decir, los vectores de E cuyo "producto escalar" con los vectores de H es nulo. Una definición alternativa, más cómoda por no tener que trabajar con formas bilineales, es

$$H^\perp := \{\omega \in E^* \mid \forall u \in H, \omega(u) = 0\}$$

Observamos que a tenor de esta definición $H^\perp \subseteq E^*$ mientras que en la primera definición $H^\perp \subseteq E$ y son subespacios vectoriales (ejercicio para el lector). Además, se puede demostrar que existe un isomorfismo entre los $H^\perp$ dados en ambas definiciones. Nos interesa ver si se verifica la propiedad más natural de la ortogonalidad: Que el ortogonal del ortogonal es el mismo espacio, $(H^\perp)^\perp = H$. Dado ahora $H^\perp \subseteq E$, su espacio ortogonal es

$$(H^\perp)^\perp = \{\eta \in E^{**} \mid \forall \omega \in H^\perp, \eta(\omega) = 0\}$$

Pero gracias al isomorfismo natural $E \cong E^{**}$ se tiene que eso es equivalente a

$$(H^\perp)^\perp = \{u \in E \mid \forall \omega \in H^\perp, \omega(u) = 0\} = H$$

Así, decimos que el subespacio ortogonal de H es el conjunto de formas que anulan los vectores de H. Como caso particular, tenemos que $\{0\}^\perp = E^*$ y que $E^\perp = \{0^*\}$. Otras propiedades interesantes (de sencilla comprobación que se dejan como ejercicio) serían que si $G \subseteq H \subseteq E$, entonces $H^\perp \subseteq G^\perp \subseteq E^*$ y que $(H \cap G)^\perp = H^\perp + G^\perp$. Por otro lado, como podemos pensar que $H^\perp$ es un complementario de H se tiene la igualdad de dimensiones $\dim H + \dim H^\perp = \dim E$.