Ángel Prieto de la Cruz

ENDOMORFISMOS. DIAGONALIZACIÓN Y FORMAS CANÓNICAS

El objetivo de este texto es presentar un resumen superficial de esta parte de la asignatura de Álgebra Lineal. Incluye las definiciones y los teoremas más importantes, trucos de cálculo y observaciones de interés para poder enfrentarse a los ejercicios. He omitido todo tipo de demostración y de formalismo, por lo que en ningún caso pretende ser un sustituto de los apuntes oficiales.

Notación: Consideraremos en adelante f un endomorfismo de un K espacio vectorial E de dimensión n con matriz asociada A en unas ciertas bases de E. Al polinomio característico lo denotaremos $P(x)$, al polinomio mínimo $m(x)$, a la matriz diagonal D y a la matriz de Jordan $\mathcal{J}$. A los valores propios les llamare VAPs y a los vectores propios VEPs por comodidad.

POLINOMIO CARACTERÍSTICO

- $P(x) = \det(A - xI)$, por tanto en general se calcula mediante el determinante de la matriz restando x en la diagonal
- Si A es 2×2, se tiene que $P(x) = x^2 - (trA)x + \det A$
- Si A es 3×3, se tiene que $P(x) = -x^3 + (trA)x^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})x + \det A$, siendo A_{ii} el menor de la matriz centrado en el elemento a_{ii}.
- En general, si A es $n \times n$ el polinomio característico $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ verificará $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\, trA$, $a_0 = \det A$. Observad que esto además de ser útil para el cálculo del polinomio nos sirve a la inversa. Conocido el polinomio característico podemos saber el determinante de una cierta matriz con solo mirar su término independiente.
- $gr\big(P(x)\big) = n$, lo cual por el teorema fundamental del álgebra sabemos que tendrá n raíces en $\mathbb{C}$. En un cuerpo arbitrario el número de raíces es menor o igual que *n*.
- Las raíces de $P(x)$ son los VAPs de A (resp. de f), contados con su respectiva multiplicidad.. Recordad: v es VEP de VAP λ si $f(v) = \lambda v$.

POLINOMIO MÍNIMO

- Entendemos por evaluar un polinomio $q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$ en f (resp. en A) a hacer $q(f) = \sum_{i=0}^{n} q_i f^i$, siendo $f^i = f \circ f \cdots \circ f$ y $f^0 = Id$. Observamos que $q(f)$ es un endomorfismo, ya que es una combinación lineal de endomorfismos.
- Decimos que $q(x)$ es un polinomio anulador de f (resp. de A) si $q(f) = 0$.
- El polinomio mínimo de f se define como el polinomio mónico de menor grado que divide a cualquier polinomio anulador de f.
- El polinomio mínimo de f es un polinomio anulador de f, i.e. $m(f) = 0$.
- El polinomio característico es un polinomio anulador de f, i.e. $P(f) = 0$
- Se deduce que $m(x)$ divide $P(x)$
- El polinomio mínimo y característico tienen las mismas raíces (los VAPs), pero con distinta multiplicidad
- $gr(m(x)) \leq \dim E = n = gr(P(x))$

- Para calcular el polinomio mínimo se procede de la siguiente manera:
    1. Si conocemos un polinomio anulador, el polinomio mínimo será cualquiera de sus divisores de dimensión menor o igual a n.
    2. Si conocemos el característico, el mínimo será un divisor que tenga los mismos factores lineales con distinta multiplicidad.

    En ambos casos, si hay más de una posibilidad se ha de sustituir f (en la práctica se sustituye A) en los distintos candidatos, empezando desde el más pequeño, hasta que se anule.

CRITERIO DE DIAGONALIZACIÓN

- Se dice que f (resp. A) es diagonalizable si existe un cambio de base de modo que la matriz asociada en esa nueva base sea diagonal.
- Los elementos de la matriz diagonal serán los VAPs, repetidos tantas veces como indique su multiplicidad.
- Si λ es un VAP, el conjunto de VEPs de valor propio λ tiene estructura de espacio vectorial y es $ker\ (f - \lambda I)$.
- Si $\lambda \neq \mu$ son VAPs, $ker(f - \lambda I) \cap ker(f - \mu I) = \{0\}$ i.e. los espacios de VEPs están en suma directa.
- Para ver si un endomorfismo es diagonalizable se procede de la siguiente manera:

    1. Conocido el polinomio característico:

        El endomorfismo es diagonalizable si $P(x)$ verifica
        (i). Descompone como producto de n factores de grado 1, iguales o repetidos $P(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$
        (ii). Se verifica que, $\forall i, m_i := mult(\lambda_i) = \dim ker(f - \lambda_i I)$

        Un método para que muchas veces se pueda hacer "a ojo" el cálculo de la dimensión de estos núcleos es recordar que

        $$\dim ker(f - \lambda_i I) = n - \dim Im\ (f - \lambda_i I) = n - rg(A - \lambda_i I)$$

    2. Conocido el polinomio mínimo:

        El endomorfismo es diagonalizable si $m(x)$ verifica

        (i). Descompone como producto de factores lineales simples $m(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$

- La base en la cual el endomorfismo diagonaliza es la reunión de las bases de los espacios $ker(f - \lambda_i I)$
- La matriz P cambio de base tendrá por columnas los elementos de esta base y se verificará que $D = P^{-1}AP$.
- $\prod \lambda_i^{m_i} = \det D = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(P) \det A = \det A$
- El orden en el que se numeran los VAPs (y por tanto el orden en el que se colocan sobre la diagonal de D) es indiferente, siempre y cuando la base de VEPs se dé en el mismo orden.

DESCOMPOSICIÓN EN COMPONENTES PRIMARIAS

- Según el criterio 1.(ii) de diagonalización, si f es diagonalizable entonces $m_i = \dim Ker(f - \lambda_i I)$. Como $n = \sum_i m_i$ y estos núcleos están en suma directa se tiene que
$$E = ker(f - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus ker(f - \lambda_r I)$$

- Supongamos que un endomorfismo verifica el criterio de diagonalización 1.(i) pero no el 1.(ii) (i.e. no verifica tampoco 2.(i)). En tal caso NO tendremos una descomposición como la anteriormente mencionada.
- Recordemos que dado cualquier endomorfismo g, $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker g^i \subseteq \cdots$ En efecto, si $u \in \ker g \Rightarrow g(u) = 0 \Rightarrow g^2(u) = g\big(g(u)\big) = g(0) = 0 \Rightarrow u \in \ker g^2$.
- Si $m_i \neq \dim \ker(f - \lambda_i I)$, elevamos el endomorfismo $(f - \lambda_i I)$ a potencias sucesivas hasta que encontremos el primer $d_i \in \mathbb{N}$, $d_i \leq m_i$ tal que $m_i = \dim \ker(f - \lambda_i I)^{d_i}$.
- Los d_i son la multiplicidad de los VAPs como raíces del polinomio mínimo.

$$P(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$
$$m(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r}$$

- En este caso se tiene la llamada descomposición de E en componentes primarias
$$E = ker(f - \lambda_1 I)^{d_1} \oplus \cdots \oplus ker(f - \lambda_r I)^{d_r}$$
- Observamos que f es diagonalizable si y solo si $d_i = 1, \forall i$, lo cual coincide con el criterio de diagonalización del polinomio mínimo.

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE JORDAN

- Una matriz de Jordan $\mathcal{J}$ es una matriz que tiene los valores propios en la diagonal, ceros o unos en la diagonal inmediatamente inferior y ceros en el resto de posiciones.
- Si un endomorfismo verifica la condición 1.(i) de diagonalización, existe una matriz cambio de base Q tal que $\mathcal{J} = Q^{-1}AQ$. En particular, si verifica además 1.(ii) $\mathcal{J} = D$
- Por el teorema de descomposición en componentes primarias, podemos restringir los polinomios mínimo y característico a los subespacios $\ker(f - \lambda_i I)^{d_i}$ de manera que $P_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ y $m_i(x) = (x - \lambda_i)^{d_i}$ para cada i.
- Con estas restricciones, calculamos la forma de Jordan $\mathcal{J}_i$ de la siguiente manera:

    1. La matriz $\mathcal{J}_i$ tendrá dimensión m_i
    2. La matriz $\mathcal{J}_i$ tendrá el VAP λ_i sobre la diagonal
    3. Dividiremos la matriz en k bloques, siendo $k = \dim \ker(f - \lambda_i I)$
    4. Cada bloque será una submatriz de Jordan $\mathcal{J}_{ij}$ que tendrá sobre la diagonal el VAP λ_i y unos en la diagonal inmediatamente inferior.
    5. Un bloque siempre tiene dimensión d_i, y el resto de bloques tendrán dimensión menor o igual a esta.
    6. La matriz $\mathcal{J}_i$ es la que tiene en la diagonal los bloques $\mathcal{J}_{ij}$, ordenados de mayor a menor dimensión.

- Una vez calculada las matrices $\mathcal{J}_i, \forall i$ la matriz $\mathcal{J}$ de f es la que tiene sobre la diagonal las $\mathcal{J}_i$.

- Para encontrar la base en la cual la forma de un endomorfismo es la de Jordan, calcularemos individualmente las bases restringidas para la cual la matriz es la $\mathcal{J}_i$ y luego haremos la reunión de bases.
- Restringidos a $ker(f-\lambda_i I)^{d_i}$, la base de la $\mathcal{J}_i$ se calcula de la siguiente manera

1. Necesitamos m_i vectores linealmente independientes.

2. Esos vectores los cogeremos de los espacios $\ker(f-\lambda_i I), \cdots, ker(f-\lambda_i I)^{d_i}$. En particular cogeremos

- $n_1 = \dim\ker(f-\lambda_i I)$ vectores de $\ker(f-\lambda_i I)$

- $n_2 = \dim\ker(f-\lambda_i I)^2 - \dim\ker(f-\lambda_i I)$ vectores de $\ker(f-\lambda_i I)^2$

- $\cdots$

- $n_{d_i} = \dim\ker(f-\lambda_i I)^{d_i} - \dim\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-1}$ vectores de $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i}$

Se observa que al final tendremos un total de $n_1+\cdots+n_{d_i} = m_i$

3. Si $u \in \ker(f-\lambda_i I)^{d_i}$, se tiene que $(f-\lambda_i I)u \in \ker(f-\lambda_i I)^{d_i-1}$

4. Cogemos n_{d_i} vectores linealmente independientes de $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i}$, $\{u_1,\cdots,u_{d_i}\}$ que no estén en $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-1}$. Los vectores $\{(f-\lambda_i I)u_1,\cdots,(f-\lambda_i I)u_{d_i}\}$ son linealmente independientes en $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-1}$. Si con eso está completa una base de $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-1}$, ya está. Si no, completamos a una base añadiendo ciertos vectores $\{v_1,\cdots,v_s\}$ linealmente independientes que no estén en $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-2}$. Iteramos el proceso considerando que ahora los vectores $\{(f-\lambda_i I)^2u_1,\cdots,(f-\lambda_i I)^2u_{d_i},(f-\lambda_i I)v_1,\cdots,(f-\lambda_i I)v_s\}$ son linealmente independientes en $\ker(f-\lambda_i I)^{d_i-2}$ hasta acabar.

Este método de cálculo de bases merece un ejemplo obligado, para apreciar que en la práctica no es tan complicado al ser los d_i valores pequeños.

Ejemplo: Sea f un endomorfismo de E con $P(x)=(x+1)^3$ y $m(x)=(x+1)^2$. Es claro que el mínimo no descompone en factores lineales no repetidos por lo que f no es diagonalizable. La forma de Jordan tendrá dimensión 3, habrá un solo bloque $\mathcal{J}_1$ asociado al valor propio -1. Este a su vez se dividirá en bloques. Como ha de haber uno de dimensión 2 (lo indica el exponente del mínimo), tiene que haber otro de dimensión 1 y la matriz de Jordan es

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para buscar una base, observamos que $\dim\ker(f+I)=2$ ($\mathcal{J}$ se divide en dos bloques) y como en este caso $d_1=2$, $\dim\ker(f+I)^2=3=m_1$. Buscamos $\dim\ker(f+I)^2-\dim\ker(f+I)=3-2=1$ vector que sea de $\ker(f+I)^2$ y no sea de $\ker(f+I)$. Como $\ker(f+I)^2=E$, cualquier vector que no esté en $\ker(f+I)$ es válido. Sea u un tal vector, entonces $(f+I)u \in \ker(f+I)$. Basta ahora encontrar un vector $v \in \ker(f+I)$ que sea linealmente independiente con los anteriores y la base de Jordan es $\{u,(f+I)u,v\}$.