

VAVILOV-CHERENKOV ERRADIAZIOAREN TEORIA

DIEGO LASA GOICURIA

Gaien Aurkibidea

1	Testuinguru historikoa	2
2	Cherenkov erradiazioaren azalpen kualitatiboa	2
3	Atariko oinarrizko testuinguru matematikoa	4
4	Ingurune material batean higitzen den karga baten problema	6
4.1	Testuingurua	6
4.2	Eremu elektromagnetikoen lorpena	6
4.3	Energia galera denbora unitateko	10
4.4	Erradiazio gunea eta Cherenkov-en erradiazioa	11
4.4.1	Energia espektrua	13
4.4.2	Energia fluxuaren norabidea	14
A	Gehigarria: eremu elektrikoaren osagaiak	16

Vavilov-Cherenkov erradiazioaren teoria

Diego Lasa Goicuria

2008. urtea

1 Testuinguru historikoa

1.910. urtean Madame Curie-k antzeman zion lehenegoz Cherenkov erradiaziorari zenbait likido erradiaktiboek igortzen zuten kolore urdin argiari erreparatu zionean. Hamasei urte geroago, 1.926. urtean hain zuzen ere, L. Mallet-ek erradiazio mota honi buruzko lehen ikerketa serioak aurrera eramane zituen. Mallet-ek beste motako fluoreszentziek ez bezala (hauek banda-estruktura baitzuten), Cherenkov erradiazioa espektroaren tarte batean behintzat txuria zela eta espektro jarrikoa zuela ondorioztatu zuen.

1.934an Mosku-ko Lebedev institutuan, P. A. Cherenkov-ek, S. I. Vavilov-en zuzendaritzapean, bere doktorego-tesia geroago bere izena hartuko zuen erradiazioaren inguruan egiten hasi zen. Bere ikerkuntzetan, igorritako erradiazioa polarizaturik zegoela eta esperimentuetan erabilitako likidoaren arabera ez zela somatu zuen; fluoreszentzia erradiazio mota honen iturri ez zela behin-betiko frogatuz. Halere, Cherenkov-ek ez zen bere behaketak modelatu zitzakeen eredu matematiko bat sortzeko gai izan.

Cherenkov-ek bere emaitzak argitaratu eta berehala I. M. Frank eta I.E. Tamm-ek, nonbait, erradiazioaren iturria ingurune argiaren abiadura baino abiadura handiagoa zuten kargetan zegoela susmatu zuten. Bi zientzilari hauek ingurune dielektriko batean higitzen den kargaren problemari soluzioa eman zioten 1.937an idatzitako “paper”-ean. Hiru zientzilari hauek arlo honetan egindako ekarpenengatik Nobel-arekin sarituak izan ziren 1.958an.

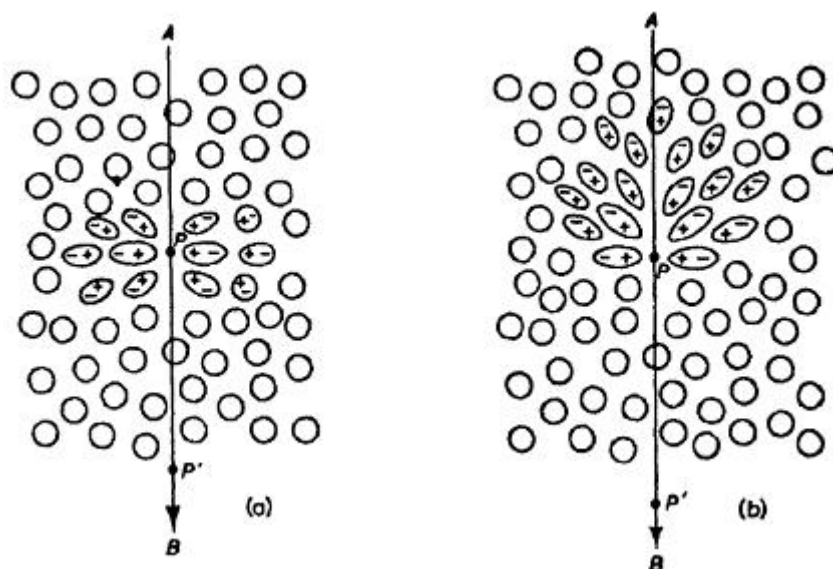
2 Cherenkov erradiazioaren azalpen kualitatiboa

Izan bedi ingurune garden edo kristal batean zehar higitzen den elektroia. 1. irudiak erakusten digu zein den ingurunearen jokaera bere baitan higitzen den elektroia-aren abiaduraren arabera.

Inguruneko atomoen gutxi gorabeherako karga banaketa esferikoa da, baina elektroia P puntura gerturatzean puntuaren inguruko atomoak polarizatu egiten dira elektroia-aren daraman karga elektrikoaren ondorioz. Orain elektroia P' puntura badoa, P puntu inguruko atomoak euren jatorrizko formara bueltatzen dira. Deformaturik dauden bitartean atomoak dipoloak bailira jokatzeko dute, hau da, elektroia euren inguruan pasatzen denean pulsu elektromagnetiko txiki bat sortzen dela. Halere, egoeraren simetria handia dela medio (axiala eta azimutala) ez da inolako eremurik hedatuko distantzia handietara, eta ondorioz, ez da distantzia handietara erradiaziorik igorriko. Ikus bedi 1(a) irudia.

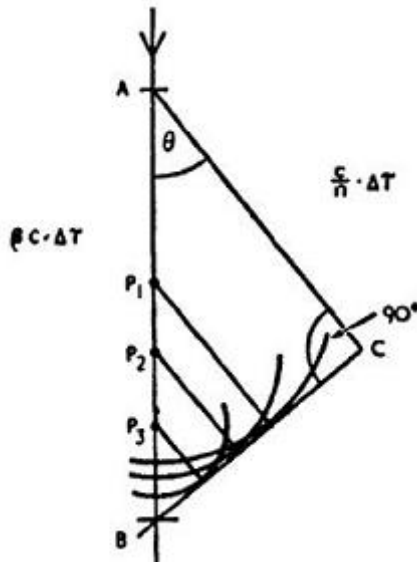
Izan bedi orain beste elektroia bat. Elektroia honen abiadura argiak ingurune horretan duen abiadurarekin konparagarria bada irudia guztiz bestelakoa da (Ikus bedi 1(b) irudia). Oraingoan, simetria azimutala dagoen arren, ez da simetria axialik azaltzen. Hori dela eta, polarizazio total bat azalduko da ardatzaren zehar, zeina erradiazioa igortzeko gai izango den. Igorritako erradiazioak pulsu elektromagnetikoaren Fourier-en garapeneko gaien maitatasunak izango ditu.

Orokorrean ibilbideko puntu guztietatik igorriko dira pulsu elektromagnetikoak. Halere, euren interferentzia suntsitzailea izango da ia beti eta ondorioz, ez da erradiaziorik igorriko



Irudia 1: (a) Elektroiak "astiro" higitzen diren, (b) Elektroiak "arina" higitzen diren.

distantzia handietara. Dena den, partikularen abiadura ingurune horretako argiaren abiduraren fase abiadura baino handiagoa bada, posible zaie ibilbideko puntuetatik igortzen diren pultsu elektromagnetikoei fasean egotea bata bestearekiko. Hori dela eta, urruneko puntuetan eremu elektromagnetikoak izan ditzakegu. Ideia garbiagoa izateko Huygens-en eraikuntza egingo dugu.



Irudia 2: Huygens-en eraikuntza koherentzia azaltzeko.

Eraikuntza honetatik ulertzen da zergatik erradiatuko den, hare gehiago, ulertuko da zergatik igortzen den norabide bakar batean.

2. irudiko θ angelua, hots, igorritako erradiazioari esleitutako \mathbf{S} Poynting-en bektorak izango duen norabidea, pultsu ezberdinen koherentzia bermatzen duen angelua izango da, hau da, BC uhin-frontea sortzeko baldintza ezartzen duen hori. Pultsuak koherenteak izango dira partikulak AB tartea zeharkatzeko behar duen denbora eta argiak (edo pultsuek) AC zeharkatzeko behar duen denbora berdinak direnean. Izan ere, bi edo hainbat erradiazio iturri koherenteak izango

dira euren arteko desfasea beti konstante mantentzen denean, euren arteko desfase beti ezaguna denean edo euren fasea beti berdina denean.

Noiz gertatzen da baina lehen aipatutako baldintza? Partikularen abiadura βc bada, A eta B puntuen arteko distantzia

$$AB = \beta c \Delta \tau$$

izango da.

Aldiz, argiarena c/n bada, A eta C puntuen arteko distantzia

$$AC = \frac{\beta}{c} \Delta \tau$$

izango da.

Huygens-en eraikuntza aztertuz eta bi distantzien balioak berdinduz,

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon}}$$

Azken hau “Cherenkov-en erlazio” gisa ezagutzen da.

Azkeneko berdintza horrela idatz genezake ingurune edo material dielektriko horretan igortzen diren pulsu edo uhin elektromagnetikoetarako $k^2 c^2 = \epsilon \omega^2$ delako. Beraz,

$$\frac{kc}{\omega} = \epsilon^{\frac{1}{2}} = n$$

Horrela erlazionatzen dira orduan ingurune dielektrikoaren n errefrakzio indizea eta ϵ permitibatate elektrikoa.

Bestalde, honakoak behatzen dira:

- n errefrakzio indizedun ingurunean muga abiadura bat dago $\beta_{min} = \frac{1}{n}$, zeinaren azpitik ez den erradiaziorik igortzen.
- Partikula ultraerlatibista batentzat, $\beta \approx 1$, igorpen angelu bat esistitzen da:

$$\theta_{max} = \arccos \frac{1}{n}$$

- Erradiazioaren espektroari dagokionez: ikuskorrean edo hemendik hurbil kokatzen da.

3 Atariko oinarritzko testuinguru matematikoa

Abia gaitezen Maxwell-en ekuazioetatik,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

Ekuazioak unitate gaussdarretan daude idatzita, non $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ hartuko dugun, hau da, suposatuko dugu μ permiabilitate magnetikoak 1 balio duela eta

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

dela. Azken konstante dielektrikoaren ohiko parametrizazioa da, hau da:

- $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$. Kasu estatikoa.
- $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \epsilon(\omega) = 1$. Frekuentzia handiko kasua.

Maxwell-en ekuazioetatik abiatuta erraz lortzen dira \mathbf{A} potentzial bektore eta ϕ potentzial eskalarrerako uhin-ekuazioak. Ondorengo definizioa eginik,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5)$$

Orain (5) adierazpena (1) adierazpenean sartuko dugu,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6)$$

Funtzio baten errotazionala nulua baldin bada, orduan funtzio hori funtzio eskalar baten gradiente bezala idatz daiteke,

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (7)$$

Azken adierazpen hau (3) ekuazioan sartuz,

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \quad (8)$$

Beste Maxwell-en ekuazio inhomogeneoan eragiketa berdina eginez gero honakoa lortzen da,

$$\overbrace{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}^{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (9)$$

Gaiak ordenatuz,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (10)$$

Lorentz-en gaugearen aukeraketarekin,

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (11)$$

honako bi uhin-ekuazioak lortzen ditugu,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (12)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \quad (13)$$

Baditugu uhin-ekuazioak (\mathbf{r}, t) adierazpidean. Komenigarria litzateke baina, uhin-ekuazio hauen Fourier-en transformatuekin lan egitea; eragiketa eta manipulazio matematikoak asko erreztzen direlako.

Izan bedi orduan ϕ potentzialaren $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{k}$ -rako Fourier-en transformatua,

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k \quad (14)$$

Zein da ∇^2 eragilearen adierazpidea \mathbf{k} espazioan?

$$(\nabla^2 \phi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \phi \quad (15)$$

Era berean, $t \Rightarrow \omega$ -rako transformatua egiten badugu,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega \quad (16)$$

Ondorioz, uhin-ekuazioen ((12),(13)) transformatua egitea orain oso sinplea da eta Jackson-en liburuko [2] (13.22) ekuazioak lortzen dira:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi \rho(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon(\omega)} \quad (17)$$

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \quad (18)$$

4 Ingurune material batean higitzen den karga baten problema

4.1 Testuingurua

Cherenkov erradiazioari buruzko lehen hurbilketa bat egin nahieran, ondorengoak hartuko dira aintzakotzat:

- Ingurune dielektrikoa erabat jarraia denekoan egingo dira kalkuluak.
- Dispersioa ez da kontuan hartuko.
- Igorritako erradiazioak kitzikatutako beste erradiazio iturriak ez da kontuan hartuko.
- Ingurunea dielektriko perfektu gisa hartuko dugu: eroankortasun nulua duena.
- Ingurunean zehar higituko den partikulak ez du sakabanaketa edo *scattering* prozesurik jasango.
- Ingurune materiala muga gabekoa da eta ondorioz, partikularen ibilbidea luzera infinitoa.

4.2 Eremu elektromagnetikoen lorpena

Izan bedi $\epsilon(\omega)$ konstante dielektrikodun ingurune material batean \mathbf{v} abiaduraz higitzen den ze kargadun partikula. Bere karga dentsitate eta korrante dentsitateak honakoak izango dira,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = ze\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \quad (19)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{x}, t) \quad (20)$$

Orain bi hauen Fourier-en transformatuak topatu behar ditugu; izan ere, kalkulu guztiak (\mathbf{k}, ω) espazioan egingo baititugu. Jackson-en liburuko (13.24) adierazpenen arabera:

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (21)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{k}, \omega) \quad (22)$$

Froga dezagun hala dela. (\mathbf{k}, ω) adierazpidean adierazitako funtzio baten Fourier-en transformatua honakoa da definizioz:

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega F(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (23)$$

Egiazta dezagun gure kasuan betetzen dela,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (24)$$

$$= \frac{ze}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} t)} \quad (25)$$

$$= \frac{ze}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v} t)} \quad (26)$$

$$= ze\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v} t) \quad (27)$$

Izan ere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-ift} dt = \delta(f) \quad (28)$$

eta gure aurreko integralak ekuazio hau betetzen du bere osagai kartestartetan.

Laburbilduz, egindako definizioekin potentzial bektorea eta potentzial eskalarra horrela geratzen dira,

$$\phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2ze}{\epsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \quad (29)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \phi(\mathbf{k}, \omega) \quad (30)$$

Prest gaude orduan eremuak ateratzeko. (\mathbf{r}, t) adierazpidean honakoak betetzen ziren:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (31)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (32)$$

Lehen frogatu bezala, Fourier-en transformatua egiteko nahikoa da ondorengo aldaketak egitearekin,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$$

$$\nabla \Rightarrow i\mathbf{k}$$

Hortaz,

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i \left[\frac{\omega\epsilon(\omega)}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} - \mathbf{k} \right] \phi(\mathbf{k}, \omega) \quad (33)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = i\epsilon(\omega) \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \phi(\mathbf{k}, \omega) \quad (34)$$

Kalkula ditzagun gure kasu berezira. Partikularen abiadura $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ izango da, hau da, 1 indizeaz adieraziko dugun norabidean. Eremuak behatuko ditugun puntua $(0, b, 0)$ izango da, hau da, ibilbidearekiko norabide perpendikularrean. Azken baldintza honekin

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = (k_1, k_2, k_3) \cdot (0, b, 0) = bk_2 \quad (35)$$

Beraz gure eremu elektrikoaren maiztasun osagaia horrela idatziko dugu,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{ibk_2} \quad (36)$$

Gure kasuan orduan,

$$\int_{\gamma_1} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2} = \int_{\gamma_2} \frac{dk_3}{\frac{k_3 + i(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{i(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}} \quad (45)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{k_3 + i(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{k_3=i(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (46)$$

$$= \frac{2\pi i}{2i(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (47)$$

$$= \frac{\pi}{(k_2^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (48)$$

Bestetik erraz froga daiteke $(-\infty, \infty)$ -rako integral impropioa eta aukeratutako ibildeko integralaren balioak bat datozela. Izan ere, ibilbidearen parte zirkularrak integralari egiten dion ekarpena nulua da. Emaizta honetara iristeko nahikoa da ibilbidea parametrizatu eta ondoren ibilbidearen erradioa ∞ -ra egitea. k_3 aldagaia izendatzailean dagoenez bakarrik, eta gainera karratura, $R \rightarrow \infty$ egiterakoan integrala anulatu da.

Integrala egin eta gero ondoko emaitza lortzen da:

$$E_1(\omega) = -\frac{ize\omega}{\sqrt{2\pi}v^2} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega) - \beta^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2}}{(\lambda^2 + k_2^2)^{1/2}} dk_2 \quad (49)$$

Geratzen den integrala erraz identifika daiteke Bessel-en bigarren motako funtzio eraldatuarekin. Izan ere

$$K_\nu(\lambda b) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2\lambda)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}b^\nu} \int_0^\infty \frac{\cos bk_2}{(\lambda^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}+\nu}} dk_2 \quad (50)$$

Honako bi erlazioak kontuan hartuz,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bk_2}{(\lambda^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}+\nu}} dk_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2}}{(\lambda^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}+\nu}} dk_2 \quad (51)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (52)$$

eremuaren balioa honakoa da:

$$E_1(\omega) = -\frac{ize\omega}{v^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega) - \beta^2} \right] K_0(\lambda b) \quad (53)$$

Honen arabera eremua $\pi/2$ -ko desfasea duela ikusten da, ondorioz abiaduraren kontrako norantza izango du eremu-osagai honek.

Egin dezagun kalkulu bera eremu elektrikoaren bigarren osagairako.

$$E_2(\omega) = -\frac{2ize}{\epsilon(\omega)(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{ibk_2} k_2 \frac{\delta(\omega - vk_1)}{\frac{(k_1v)^2}{v^2} + k_2^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)} \quad (54)$$

$$= -\frac{2ize}{\epsilon(\omega)(2\pi)^{3/2}v^2} \int dk_2 e^{ibk_2} k_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2} \quad (55)$$

$$= -\frac{ize}{\epsilon(\omega)\sqrt{2\pi}v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2} k_2}{(\lambda^2 + k_2^2)^{1/2}} dk_2 \quad (56)$$

$$(57)$$

Ondorengo definizioekin,

$$K_1(x) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{ixt}}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dt \quad (58)$$

Hori dela eta,

$$K_1(x\lambda) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{ix\lambda t}}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda t e^{i\lambda x t}}{(\lambda^2 t^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} dt \quad (59)$$

Aldagai aldaketa hau eginez gero,

$$\begin{aligned} \lambda t &= s \\ dt &= \frac{ds}{\lambda} \end{aligned}$$

hauxe lortzen da.

$$K_1(\lambda b) = \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{isx}}{(s^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} ds \quad (60)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{isx}}{(s^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} ds = 2i\lambda K_1(\lambda b) \quad (61)$$

Orduan,

$$E_2(\omega) = \frac{ze}{v} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b) \quad (62)$$

$B_3(\omega)$ erraz lortzen da eremuen ekuazioei so egiten badiegu. $E_2(\omega) = i\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, \omega)$ da eta $|\mathbf{B}(\omega)| = B_3(\omega)$. $E_2(\omega)$ eta eremu magnetikoa perpendikularrak direnez,

$$B_3(\omega) = \epsilon(\omega)\beta E_2(\omega) \quad (63)$$

4.3 Energia galera denbora unitateko

Jackson-ek iradokitzen digun bezala, partikulak egindako ibilbidea inguratzen duen zilindroa zeharkatzen duen energia fluxua kalkulatz, partikulak luzera unitateko galtzen duen energia kalkula daiteke.

Poynting-en bektorea unitate gaussiarretan honakoa dugu:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \quad (64)$$

Orduan erraz planteatu genezake zein izango den partikularen energia galdera. Kontuan hartu beharrekoak hauek dira:

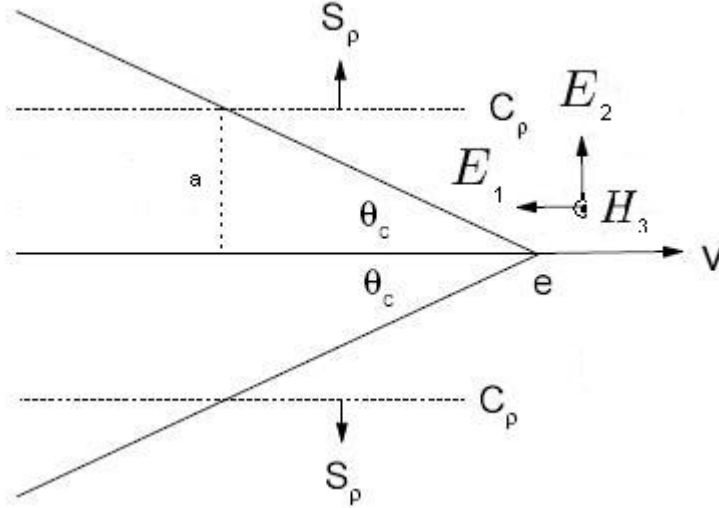
- Eremu elektrikoaren partikularen abiaduraren norabideko osagaia eta eremu magnetikoarena hartu behar dira soilik kontuan. Izan ere hauek baitira zilindroan zeharreko fluxura ekarpena izango duten bakarrak.

Planteamendua aurrera eramanez,

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{v} P = \frac{c}{4\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a B_3 E_1 dx \quad (65)$$

Izan ere $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = P$, eta gure kasuan azalera zilindroarena denez, $2\pi al$, non l luzera den. Bestetik $dx = vdt$ denez, integrala horrela berriro genezake,

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = -\frac{ca}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_3(t) E_1(t) \quad (66)$$



Irudia 4: Eremu elektrikoaren partikularen abiaduraren norabideko osagaia eta eremu magnetikoarena hartu behar dira soilik kontuan. Izan ere hauek baitira zilindroan zeharreko fluxura ekarpena izango duten bakararak.

Ondorengo kalkuluak eginez,

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_3^*(\omega) E_1(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_3(t) e^{i\omega t} E(t') e^{-i\omega t'} dt dt' d\omega \quad (67)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_3(t) E_1(t') e^{i\omega(t-t')} dt' dt d\omega \quad (68)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} B_3(t) E_1(t') \delta(t-t') dt dt' \quad (69)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} B_3(t) E_1(t) dt \quad (70)$$

Fourier-en osagaiak konplexuak izan daitezkenez integralaren parte erreala hartu eta integrazio eremua erdira murriz dezakegu. Beraz,

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = -ca \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_3^*(\omega) E_1(\omega) d\omega \quad (71)$$

4.4 Erradiazio gunea eta Cherenkov-en erradiazioa

Erradiazio gunea partikularen ibilbidetik oso urruti dagoen gunea da. Kasu honetan b hizkiaz definitu dugun inpaktu-parametroa ibilbidetik dagoen distantziarekin dauka zerikusia. Izan ere, b jotze parametroa aurreko irudiko a distantzia besterik ez da. Limite honetan ondorengo baldintza ezartzen dugu:

$$|\lambda a| \gg 1 \quad (72)$$

Puntu hauetan Bessel-en bigarren motako funtzio eraldatuen menpeko diren eremuen eite asintotikoa lortuko dugu. ν finkoa, $|z|$ handia direnean eta $\mu = 4\nu^2$ izanik,

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right) \quad (73)$$

Lehenengo gaiarekin geratuko gara. Hortaz,

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \Rightarrow K_\nu(\lambda b) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b} \quad (74)$$

Limite honetan (45), (55), (56) ekuaziotan lortutako eremuen jokaera asintotikoa honakoa da,

$$E_1(\omega, b) \rightarrow i \frac{ze\omega}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] \frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}} \quad (75)$$

$$E_2(\omega, b) \rightarrow \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} e^{-\lambda b} \quad (76)$$

$$B_3(\omega, b) \rightarrow \beta \epsilon(\omega) E_2(\omega, b) \quad (77)$$

Orain energia galera kalkulatu dugu adierazpen asintotikoak erabiliz,

$$-caB_3^*(\omega)E_1(\omega) \rightarrow \frac{z^2 e^2}{c^2} \left(-i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} \right) \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] e^{-(\lambda+\lambda^*)a} \quad (78)$$

Adierazpen honen maiztasun guztiekiko integralak partikulak bere ibilbidetik distantzia urrunetara igorritako energia adierazten du. λ -ren parte erreala positiboa izango balitz, (orokorrean horrela izaten da) adierazpeneko esponentzialaren ondorioz berehala desagertuko zen, hau da, energia guztia ibilbidearen inguruan metatzen dela. Hau λ erabat irudikaria den kasuetan ez da gertatzen. Horrela balitz, esponentzialak 1 balioa hartuko luke eta adierazpena a -ren independentea izango litzateke. Ondorioz, infiniturantz ihes egiten duen erradiazio formako energia dagoela esango dugu.

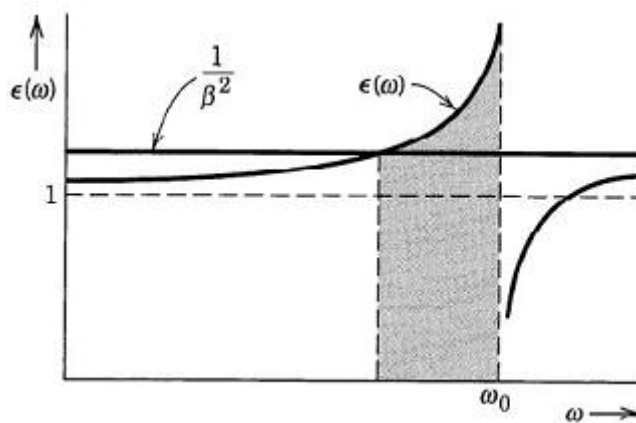
λ -ren definiziotik ($\lambda^2 = \omega^2/v^2[1 - \beta^2 \epsilon(\omega)]$), λ erabat irudikaria izateko modu bakarra $\epsilon(\omega)$ erreala (xurgapenik ez) eta $\beta^2 \epsilon(\omega) > 1$ izatea dela. Azken baldintza hau era argiago eta dotoreago batean idatzenezake $\beta = \frac{v}{c}$ dela jakinik,

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (79)$$

λ -ren forma honelakoa dela suposatuz:

$$\lambda = -i|\lambda|$$

orduan $(\lambda * / \lambda)^{1/2} = i$.



Irudia 5: Ilundutako maiztasun tartean igortzen soilik Cherenkov erradiazioa.

Honek esaten digu Cherenkov-en ω maiztasuneko erradiazioa igorpena eukitzeko, partikulen abiadura ingurunean hedatzen diren eremu elektromagnetikoen fase abiadura baino handiago behar duela izan ω maiztasunerako.

Guzti hauek (71) ekuazioan sartuz partikulak luzera unitateko igortzen duen energiaren forma lor dezakegu.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > (1/\beta^2)} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) d\omega \quad (80)$$

Zenbatekoa da ordea energia galera hau? Handia al da? Nahiz eta kalkulo zuzena egin daitekeen $\epsilon(\omega)$ -ren emandako definizioa emanez, gauzak sinplifikatu eta suposatuko dugu $\epsilon(\omega)$ -ren batzbestekoa hartu eta integrala egin dezakegula. Bestalde, S.I. unitatetara bueltatuko gara, han kalkuluak zuzenak baitira ohiko unitatetan.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} &= \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) d\omega \\ &\approx \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{2} [\omega_2^2 - \omega_1^2] \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right) \\ &= \alpha \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{2} \left[\hbar \omega_2 - \frac{\hbar \omega_1^2}{\omega_2} \right] \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right) \\ &\approx \alpha \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{2} \hbar \omega_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right) \quad \omega_1 \ll \omega_2 \\ &= \alpha \frac{\pi}{\lambda_2} \hbar \omega_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right) \end{aligned}$$

Erresonantziatik gertu, host, $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$ denean: $\frac{c^2}{v^2} \bar{\epsilon} \rightarrow 0$ dugu. Kristaletan hau $\lambda_2 = 100nm \Rightarrow \hbar \omega_2 = 12eV$ -tarako gertatzen da. Orduan,

$$\frac{dE}{dx}_{rad} \approx \alpha \pi \frac{1}{10^{-7}} 12eV/m = 2.7 \times 10^6 eV/m \quad (81)$$

Oso txikia beste prozesu batzuetan galtzen den energiarekin konparatuz.

Kalkula dezagun orain zenbait fotoi igortzen dituen.

$$\frac{dN}{dx} \approx \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c^2} [\omega_2 - \omega_1] \left[1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right] \quad (82)$$

$$= \alpha 2\pi \left[\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right] \left[1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\epsilon}}\right] \quad (83)$$

Lehen bezala, erronantzian eta $\omega_2 \gg \omega_1$ bada.

$$\frac{dN}{dx} \approx \alpha 2\pi \frac{1}{\lambda_2} \quad (84)$$

Luzera unitateko igortzen den fotoi kopuruaren estimazioa egiteko $\lambda_2 = 100nm$ eginik,

$$\frac{dN}{dx} \approx 5 \times 10^5 \text{ fotoi}/m \quad (85)$$

Beste tarte optiko bat aukeratuko bagenu; esaterako $\lambda \approx 400 - 600nm$, orduan ekuazioko faktoreak $(1/4 - 1/6) = 0.083$ litzateke eta emaitza ≈ 5 fotoi/mm-koa.

4.4.1 Energia espektrua

Energia espektrua gai honen proportzionala da,

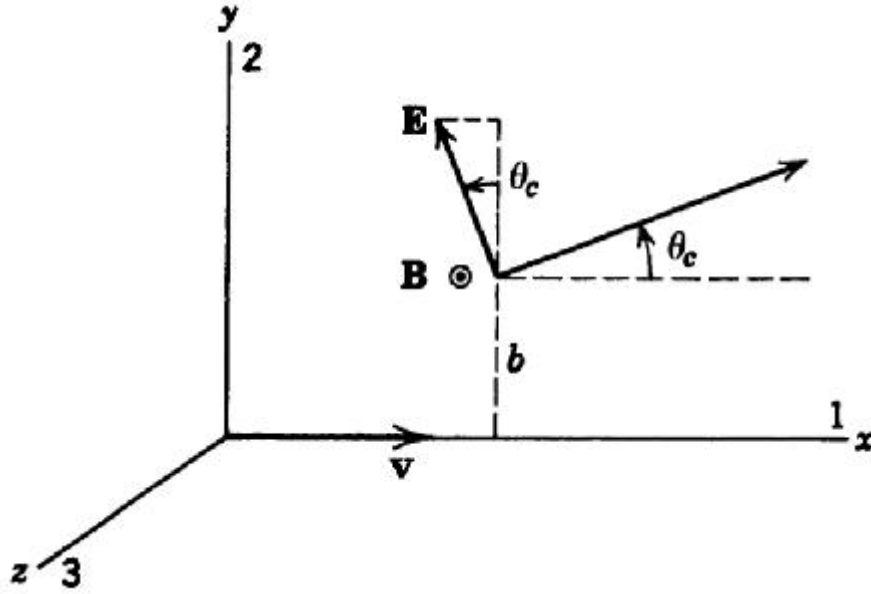
$$\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) = \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon(\omega)}\right) \quad (86)$$

Honek kualitatiboki azaltzen du zergatik den Cherenkov erradiazioa urdin argia “kolorekoa”:

- Proporzio faktore hori ω -rekin hazten da. Ondorioz ω hazten bada λ txikitu.
- $\epsilon(\omega)$ ω -rekin hazten da. Hori dela eta, ω haztean hau ere haziko da eta proporzio gaia ere bai.

4.4.2 Energia fluxuaren norabidea

Cherenkov-en erradiazioaren beste propietate bat bere igorpen angeluarena da. Hedapen norabidea $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ adierazpenak ematen digu. Irudiari so eginik erraz ondoriozta dezakegu zein den norabide hori.



Irudia 6: Eremuen kokapen eta norabidearen eskema.

Beraz,

$$\tan \theta_C = -\frac{E_1}{E_2} \quad (87)$$

Erradiazio guneko eremuen adierazpena erabilita erraz lortzen da

$$\cos \theta_C = \frac{E_2}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_2^2}{E_1^2}}} \quad (88)$$

dela.

Adierazpena landuz,

$$\frac{E_2^2}{E_1^2} = \frac{\frac{-z^2 e^2 \omega^2 [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]^2 e^{-2\lambda b}}{c^4 \lambda b}}{\frac{z^2 e^2 \lambda e^{-2\lambda b}}{v^2 \epsilon^2(\omega) b}} \quad (89)$$

$$= - \frac{v^2 \epsilon^2(\omega) \omega^2 [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]^2}{\lambda^2 c^4} \quad (90)$$

$$= - \frac{v^4 \epsilon^2(\omega) [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]^2}{c^4 [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)]} \quad (91)$$

$$= \frac{\beta^4 \epsilon^2(\omega) [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]^2}{\beta^2 \epsilon(\omega) - 1} \quad (92)$$

$$= \frac{\beta^4 \epsilon^2(\omega) [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]^2}{\beta^2 \epsilon(\omega) [1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}]} \quad (93)$$

$$= \beta^2 \epsilon(\omega) - 1 \quad (94)$$

non $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)]$ erabili den.

Hortaz, adierazpen hau (88)-n sartuz,

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (95)$$

edo

$$\cos \theta = \frac{c}{vn} = \frac{1}{\beta n} \quad (96)$$

A Gehigarria: eremu elektrikoaren osagaiak

Zeharkako uhin pultsu elektromagnetikoetan gaude interesaturik, hau da, \mathbf{k} uhin bektore-arekiko perpendikularrak diren eremuetan; ikusi dugun bezala Cherenkov-en erradiazioa norabide jakin batean erradiatzen baita.

Hau aintzakotzat hartuz gero,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Partikularen abiadura \mathbf{v} 1 zenbakiaz adierazi dugun norabidekoa bada, hots, x ardatzaren norabidekoa eta 6. irudiak adierazten duen bezala $X - Y$ planoan mugitzen bagara, orduan

$$\mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Ondorioz bi berdintza hauetariko bat bete behar da,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E(\pm \sin \theta, \pm \cos \theta, 0) \\ \mathbf{E} &= E(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Jakina da eremutarako uhin ekuazioak lortzen badira \mathbf{E} -ren akoplamenduan $\partial \mathbf{J} / \partial t$ -rekiko proportzionala dela. Gure kasuan $\mathbf{J} = J_x \hat{i}$. Hori dela eta, gure korrante dentsitatea ez da z norabidedun eremu elektrikoarekin akoplatuko. Hona hemen frogapena,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned}$$

Lehenengoaren errotaziona hartuta eta bigarreanean sartuz.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

Bigarren ekuazioa erabilita eta $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, non $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ den,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Ondorioz, gure eremu elektrikoak bi osagai izango ditu bakarrik, bat x norabidean eta beste bat y norabidean.

Erreferentziak

- [1] J. V. Jelley, *Cerenkov Radiation and its Applications*. Pergamon, New York, 1958.
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition*. Wiley, New York, 1999.
- [3] G. N. Afanasiev, V. G. Kartavenko, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31**, 2760-2776. 1998.
- [4] C. Yang, *Chinese Journal of Physics Vol. 30, N^o. 3*. 1992.
- [5] MITopencourseware, <http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/1A6A75B9-70FA-4B4F-B9D3-FDBDAAE30CC8/0/chap7.pdf>.
- [6] G. N. Afanasiev, V. G. Kartavenko and Yu. P. Stepanovsky, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **32** 2029-2043. 1999.
- [7] E. Fermi, *Phys. Rev.* **57** 485. 1940.
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, Oxford, 1984.
- [9] Farzad A. Sadjadi, *Senior Thesis: Generating Microwave Radiation by the Surface Cerenkov Effect*. 2005.
- [10] G.N. Afanasiev, *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications (Fundamental Theories of Physics)*. 2004.
- [11] M. Abramovitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. 1964.